Uppgiftsseriepaket februari 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 24.4.2022 per epost.
De enklare uppgifterna till: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
och de svårare: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi
Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Enklare uppgifter

1. Medeltalet av fem olika stora positiva heltal är 15 och medianen 18. Max hur stor kan det största av dessa tal vara?

2. Av 27 tärningar konstruerar man en $3 \times 3 \times 3$ kub. På varje tärning är summan av de motstående sidornas ögontal 7. Alla synliga ögontal på kubens sex sidor räknas ihop. Vad är det minsta möjliga värdet för den här summan.

3. Låt A vara en avbildning i planet. Säger att roterande eller speglande av planet är symmetrisk med bilden A ifall den avbildar A på sig själv. Även en 0-gradig totation, som inte gör något åt planet, räknas som en rotation. Alltså om t.ex. A har formen av bokstaven A, är de enda möjliga symmetrierna att man speglar enligt lodrätaaxeln, och 0-gradig rotation.

Låt $n > 0$ vara ett naturligt tal. Ge som exempel en bild A, vars symmetrier är exakt n olika rotationer, men där det inte finns en enda speglings symmetri.

4. På psykologilektionen arrangerades en telepatilek. Läraren skrev talen 1-17 i någon ordning på ett papper, och alla 15 elever gjorde samma sak. Varje elev fick ett poäng för varje tal som var på samma plats som lärarens. Inga två elever fick samma poängmängd, ingen fick heller ett eller femton poäng.

Klara fick flest poäng. Hur många poäng fick Klara?

5. Tre spelare A, B och C har alla 105 spelbrickor var i början, och spelar samma spel: Varje runda ger den spelare som har flest spelbrickor två stycken brickor till valfria motståndare (två spelbrickor till en spelare, eller en bricka till vardera motståndare) och kastar dessutom bort en spelbricka ur spelet. Om flera spelare har lika många spelbrickor, lottar man ut vem av dem som ska dela ut spelbrickor.

Spelet tar slut när någon spelares spelbrickor är slut; denna spelare förlorar spelet. Om spelet inte tar slut inom 300 rundor, blir spelarna trötta på och spela och går på glass. Visa, att det andra utfallet inträffar oberoende av spelarnas spelstrategier.

6. (a) Namnger kanterna i en kub med talen $1, 2, \ldots, 12$ så att varje tal förekommer vid exakt en kant. Undersöker kanterna som rör vid hörnen. I alla kubens hörn skriver vi summan av talen för de kanter som rör vid hörnen. Är det möjligt att varje hörn i kuben antar samma tal?

(b) Är händelsen i a)-fallet möjligt ifall man byter ut något av talen $1, 2, \ldots, 12$ med talet 13?

7. Existerar det positiva reella tal a, b, c, x, för vilka det gäller att $a^2+b^2 = c^2$ och $(a+x)^2+(b+x)^2 = (c+x)^2$?

8. Låt $a, b, c > 3$ vara primtal. Visa att $(a-b)(b-c)(a-c)$ är delbart med talet 48.

9. Vi säger att $n \in \mathbb{N}$ är ett k-ettal, om n:et i decimalsystemet består av k stycken ettor. Alltså t.ex. 11 är ett 2-ettal.

Visa att det existerar $k' \in \mathbb{N}$, för vilken k-ettal är delbart med talet 37 alltid då k är delbart med talet k'.

Svårare uppgifter

10. Inne i enhetskvadraten ritar man en ändlig mängd cirklar, vars randers sammanräknade längd är 10. Visa att man genom kvadraten kan dra en sträcka som skär minst fyra cirklar.

11. Betecknar Pascals triangel så att $P(1,1)$ är toppen av Pascals triangel, $P(2,1), P(2,2)$ är den andra raden osv. Låt $n \in \mathbb{N}$, och $1 \leq k \leq 2^n$. Visa att $P(2^n, k) \equiv 1 \mod 2$.

12. Låt x, y vara positival reella tal, för vilka det gäller $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$. Bestäm det största värdet av produkten xy.

13. Middagsbjudningen har n gäster och n värdar, $n \geq 4$. De sitter i någon ordning kring ett runt bord. Två gäster har möjlighet att diskutera med sinsemellan om det mellan dem finns högst en person eller om det mellan dem finns exakt två personer, varav minst den ena är en värd.

Visa att det på bjudningen finns minst n par gäster som kan diskutera med varandra.

14. Låt P en ändlig mängd bestående av minst fem punkter i planet. En del av mängden $P : s$ punkter färgas röda och resten blåa. Vi antar att vilka som helst tre likafärgade punkter inte befinner sig på samma linje.

Visa att man kan tillverka en sträcka som uppfyller båda dessa krav:

- Sträckans ändpunkter är likafärgade punkter ifrån mängden P
- Sträckan innehåller inte fler punkter från mångden P än ändpunkterna.

15. Låt $N = \mathbb{N} \setminus 0$. Leta efter alla funktioner $f : N \to N$, som uppfyller kravet

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

för varje $n \in N$.

16. Det är givet en tabell med n rader och m kolumner, $n > m$, i vars alla celler det finns ett icke-negativt reellt tal. Om det i cellen (i, j) (i rad, j kolumn) finns ett positivt reellt tal, är summan av raden i:s celler det samma som summan av kolumnen j:s celler.

Visa, att det i tabellen finns en rad, som består av enbart nollor.

17. Antar att $n, n \geq 1$, en oändligt liten spelpjäs har placerats i någon punkt i planet. I samma punkt kan det existera flera spelpjäser. En spelare spelar ett spel, där hen väljer två spelpjäser som existerar i några punkter A och B, och flyttar dem till sträckan AB:s medelpunkt. Vi kallar spelets startläge för lösbart ifall spelaren med denna sorts drag kan förflytta alla spelpjäser till samma punkt.

För vilka värden på n är alla n-storleks startlägen lösbara?

18. Undersöker en funktion $\{0,1\}^n \to \{0,1\}, n > 0$. Kallar dessa för sanningsfunktioner.

Definierar $f\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 0$.

Till exempel kan funktionen $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $g(0,0) = g(1,1) = g(0,1) = 1$, $g(1,0) = 0$ skrivas med hjälp av funktionen f som $g(a,b) = f(a, f(b,b))$.

Visa att varje sanningsfunktion kan på motsvarande sätt skrivas med hjälp av funktionen f.