Uppgiftsseriepaket april 2022

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 23.6.2022 per epost.

De enklare uppgifterna till: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Enklare uppgifter

1. Två vanliga (sexsidiga) tärningar kastas. Vad är sannolikheten att produkten av de två ögontalen man får är delbart med talet fem?

2. Undersöker två på varandra följande udda heltal. Av dem är den större tre gånger så stor som den mindre. Vad är dessa två tals summa?

3. Leta efter tal a, b som uppfyller villkoret $(x^2 - 3x + 2) \mid (ax^4 + bx^3 + 1)$.

4. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning. Låt M vara en inre punkt till fyrhörningen. Visa att $|AM|+|MB| \leq |AD| + |DC| + |CB|$.

5. Låt ABC vara en triangel, där vinkeln BAC är rät, och vinkeln BCA är $30°$. På sidan BC ritas en mittpunktsnormal. Den delar sidan AB i punkten X. Visa att triangeln BCX är liksidig.

6. I tre personerns fotboll är en av spelarna målvakt och de två övriga är mot varandra spelande fältspelare. När en fältspelare gör mål blir hen målvakt och målvakten fältspelare.

Messi, Maradona och Pele spelade spelet någon viss tid. Efteråt berättade de åt Gödel att Messi hade varit fältspelare i 10 rundor, Maradona för 17 rundor och Pele 15 rundor. Då påstod Gödel att hen visste vem som gjorde det sjätte målet. Vem var det?

7. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion som uppfyller kravet $f(x + y) \geq f(xy)$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$.

Visa att f är en konstantfunktion, alltså att det existerar $c \in \mathbb{R}$, för vilken det gäller $f(x) = c$ för varje $x \in \mathbb{R}$.

8. Visa att det för de positiva reella talen a, b, c gäller att

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

När gäller likhet?

9. *Först lite teori. Talet e är klart irrationellt, vars endecimalige närmevärde är* $2,7$*. Funktionen* $\ln$ *definieras så att om* $e^x = y$ *så* $\ln y = x$*. Funktionen* $\ln x$ *är definierad då* $x > 0$*.*

Funktionen $\ln$ *lyder följande räkneregler:* $\ln xy = (\ln x) + (\ln y)$*,* $\ln(x^n) = n \ln x$ *och* $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$.

Och nu till uppgiften...

Låt $n \in \mathbb{N}$ och $x_1, \ldots, x_n > 0$ vara rella tal. Visa att

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n}.$$

10. På bordet finns tre högar som alla har n småstenar, $n > 0$. Två spelare spelar följande spel: På sin tur tar spelaren ur valfri hög en valfri mängd stenar (dock minst en.) Den spelare vinner som gör draget efter vilket det inte finns en enda sten mera på bordet.

Visa att den vinnande strategin finns hos den spelaren som börjar.

11. Leta efter alla tal $n \in \mathbb{N}, n > 0$, där n är en kvadrat och alla siffror i talet $n : s$ decimaltalsframställning är fyror.

12. Vinklarna i en triangel är α, β och γ. Inne i den inskrivna cirkeln till triangeln ritas en triangel vars hörnpunkter är skärningspunkterna mellan den ursprungliga triangeln och den inskrivna cirkeln. Bestäm vinklarna i den triangeln som just bildats.

Svårare uppgifter

13. Leta efter alla par $n, m \in \mathbb{N}$ som uppfyller ekvationen

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2.$$

14. Låt $a \neq b$ vara reella tal, för vilka det gäller

$$a^4 - 2022a = b^4 - 2022b > 0.$$

Visa att $ab < 0$.

15. Låt a, b, c vara positiva heltal, som inte har gemensamma faktorer. Vilka heltalsvärden kan man få ur uttrycket

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}?$$

16. För hur många positiva heltalspar a, b gäller det att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2022}?$$

17. På en cirkels rand har det markerats 18 punkter som ligger på samma avstånd från varandra. En del av dessa punkter är färglagda. Vi säger att färgläggningen är bra, om man ur gruppen med färglagda punkter kan hitta fyra som är hörnpunkterna till en rektangel. Vad är den största mängden färglagda punkter för vilka man hittar en icke-bra färgläggning.

18. Låt A, B och C vara tre punkter på en cirkels rand, och låt M vara cirkelns medelpunkt. Låt M' vara punkten M:s spegling på sträckan AB. Vi antar att punkterna A, B, C är valda så att M' är inuti triangeln ABC, och vidare att M' är skärningspunkten till bisektriserna för vinklarna CAB och CBA. Sträckan AM skär på nytt cirkeln i punkten D.

Visa att $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

19. Låt AB vara en sträcka, och rita cirkeln ω så att sträckan AB är dess diameter. Låt O vara cirkelns medelpunkt och OC cirkelns radie som är vinkelrät emot sträckan AB. Låt M vara en inre punkt på sträckan OC.

Låt N vara skärningspunkten mellan cirkeln ω och sträckan AM (som alltså är en annan skärningspunkt än A). Vi ritar tangenter till cirkeln ω i punkterna N och B. Låt P vara dessa tangenters skärningspunkt.

Visa att det är möjligt att rita en cirkel, på vars rand alla punkterna M, O, P och N finns.

20. Låt V vara ett riktningslöst nät, som har 2019 maskor. En vändning av nätet i maska v betyder att nätet förändras så att det för alla andra maskor v' tas bort en kant (v, v') om en sådan kant existerade innan vändningen, och det läggs till en kant (v, v') om en sådan inte existerade innan vändningen.

Nätet kallas för minimerat om antalet kanter i nätet inte mera kan minskas med någon kombination av svängningar. (Här får samma maska svängas upprepade gånger.)

Vad är det största möjliga antalet kanter i ett minimerat nät med 2019 maskor?

21. En enhetskvadrat delas i rätvinkliga trianglar, vars sidor är i samma riktning som enhetskvadraten. En del av de rätvinkliga trianglarna färgläggs rött och resten vitt, dock så att summan av areorna för de röda rätvinkliga trianglarna är den samma som summan av areorna för de vita rätvinkliga trianglarna.

Inuti varje röd rätvinklig triangel skrivs dess höjd och bredd. Inne i varje vit rätvinklig triangel skrivs dess bredd och höjd.

Visa att det minsta möjliga värdet för summan av de tidigare nämnda talen är $2\frac{1}{2}$.