Tammikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 25.2.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: anne-maria.ernvall-hytonen(at)helsinki.fi.

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. A ja B leipovat maanantaina kakkuja. A leipoo kakun joka viides päivä ja B leipoo kakun joka toinen päivä. Kuinka monen päivän jälkeen he molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina?

2. Mikä numero on satojen kohdalla luvussa $(20! - 15!)$? (Kun n on positiivinen kokonaisluku, niin merkinnällä $n!$ tarkoitetaan lukua $n \cdot (n-1) \cdots 1$. Esimerkiksi on $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.)

3. Puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaiset sivut ovat AB ja CD sekä on voimassa $AB + CD = AD$. Diagonaalit AC ja BD leikkaavat pisteessä E. Suora, joka kulkee pisteen E kautta ja on yhdensuuntainen sivun AB kanssa, leikkaa janan AD pisteessä F. Osoita, että $\angle BFC = 90°$.

4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, joilla on yhtä monta kuudella jaollista ja kuudella jaotonta tekijää.

5. Yksi Eulerin konjektuureista kumottiin 1960-luvulla, kun kolme amerikkalaista matemaatikkoa osoitti, että on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolle

$$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5.$$

Etsi luku n.

6. Kolmion ABC ulkopuolelle piirretään neliö, jonka sivuista yksi on jana AB. Lisäksi piirretään toinen neliö, jonka sivuista yksi on jana BC. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ja janan CA keskipiste muodostavat tasakylkisen suorakulmaisen kolmion.

7. Olkoon piste H kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste, piste A' janan BC keskipiste, piste X kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan keskipiste, piste Y kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan keskipiste ja D kolmion kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste. Osoita, että pisteet X, Y, D, H ja A' ovat samalla ympyrällä.

8. Olkoon piste D kolmion ABC kärjestä A lähtevän korkeusjanan kantapiste ja piste E kolmion kärjestä B lähtevän korkeusjanan kantapiste. Olkoon kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O. Osoita, että $OC \perp DE$.

9. Olkoon piste I kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. Olkoon piste T pisteen B kohtisuora projektio suoralle BI. Olkoon pisteet L ja M sivujen CA ja AB keskipisteet. Osoita, että pisteet T, L ja M ovat samalla suoralla.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon $p \geq 3$ alkuluku. Määritellään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

missä $\{x\} = x - [x]$ on luvun x murto-osa. Määritä $f(p)$.

11. Olkoon $R(p,q)$ pienin positiivinen kokonaisluku, jolla mikä tahansa täydellisen $R(p,q)$ graafin kaarien väritys punaisella ja sinisellä sisältää täydellisen p solmun aligraafin, jonka kaikki kaaret on väritetty punaisella, tai täydellisen q kärjen aligraafin, jonka kaikki kaaret on väritetty sinisellä. Osoita, että $R(4,4) = 18$.

12. Todista seuraava vahvempi versio Schurin lauseesta: Jokaista positiivista kokonaislukua r kohti on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku S, että millä tahansa kokonaislukujen $\{1, 2, \ldots, S\}$ r värin värityksellä voidaan löytää kolme erisuurta lukua x, y ja z, jotka ovat samanvärisiä ja joilla pätee $x + y = z$.

13. Graafissa G on 300 solmua. Sen kaaret voidaan värittää punaisella ja sinisellä niin, ettei ole olemassa sellaisia kolmea solmua u, v ja w, jotka olisi yhdistty samanvärisillä kaarilla (u,v), (u,w) and (v,w). Kuinka monta kaarta graafissa G voi enintään olla?

14. On annettu 18 peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista kukin on pienempi kuin 2005. Osoita, että jokin annetuista luvuista on väistämättä jaollinen numeroidensa summalla.

15. Olkoon h positiivinen kokonaisluku. Määritellään lukujono a_n seuraavilla ehdoilla: $a_0 = 1$ ja

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{jos } a_n \text{ on parillinen} \\ a_n + h, & \text{jos } a_n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Millä luvun h arvoilla on olemassa $n > 0$, jolla $a_n = 1$?