Helmikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 24.4.2022 sähköpostitse.
Helpommat tehtävät: nirmal.krishnan(at)helsinki.fi
Vaikemmat tehtävät: Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Viiden erisuuren positiivisen kokonaisluvun keskiarvo on 15 ja mediaani 18. Kuinka suuri näistä luvuista suurin voi korkeintaan olla?

2. 27 nopasta kootaan $3 \times 3 \times 3$ nopan kuutio. Jokaisessa nopassa kaikkien kahden vastakkaisen tahkon silmälukujen summa on 7. Ison kuution kaikilta kuudelta tahkolta näkyvät silmäluvut lasketaan yhteen. Mikä on pienin mahdollinen arvo tälle summalle?

3. Olkoon A kuvio tasossa. Sanomme, että tason kierto tai peilaus on kuvion A symmetria, jos se vie A:n itselleen. Myös 0:n asteen kierto, joka ei tee tasolle yhtään mitään lasketaan kierroksi. Jos siis esimerkiksi A on A-kirjaimen muotoinen, ainoat symmetriat ovat peilaus pystyakselin suhteen ja nollan asteen kierto.

Olkoon $n > 0$ luonnollinen luku. Anna esimerkki kuviosta A, jonka symmetrioita ovat täsmälleen n eri kiertoa, mutta ei yksikään peilaus minkään suoran suhteen.

4. Psykologiantunnilla järjestettiin telepatialeikki. Opettaja kirjoitti luvut 1-17 johonkin järjestykseen paperille, ja kukin 15 oppilaasta teki samoin. Kukin oppilas sai pisteen jokaisesta luvusta, joka oli samalla paikalla kuin opettajalla. Ketkään kaksi oppilasta eivät saaneet samaa pistemäärää, eikä kukaan saanut yhtä tai viittätoista pistettä.

Klaara sai korkeimmat pisteet. Kuinka monta pistettä hän sai?

5. Kolme pelaajaa, A, B ja C, joilla on kullakin alussa 105 pelimerkkiä, pelaavat seuraavaa peliä: Kullakin kierroksella se pelaaja, jolla on eniten pelimerkkejä antaa kaksi pelimerkkiä haluamilleen vastustajille (kaksi pelimerkkiä yhdelle pelaajalle tai yksi kummallekin vastustajalle) ja poistaa lisäksi yhden pelimerkeistään pelistä. Jos usealla pelaajalla on sama suurin määrä pelimerkkejä, pelimerkkien antaja arvotaan näiden keskuudesta.

Peli loppuu, kun jonkun pelaajan pelimerkit loppuvat; tämä pelaaja häviää pelin. Jos peli ei lopu 300 kierroksessa, pelaajat kyllästyvät pelaamaan ja lähtevät jäätelölle. Osoita, että jälkimmäinen vaihtoehto toteutuu väistämättä pelaajien pelistrategioista riippumatta.

6. (a) Numeroidaan kuution särmät luvuilla $1, 2, \ldots, 12$ niin, että kukin luvuista esiintyy täsmälleen yhden särmän yhteydessä. Tarkastellaan kuution kärjestä lähteviä särmiä. Kirjoitetaan kärkeen näissä särmissä olevien lukujen summa ja tehdään tämä jokaiselle kuution kärjelle. Onko mahdollista, että jokaisessa kuution kärjessä on sama luku?

(b) Onko edellisen kohdan tilanne mahdollinen, jos jokin luvuista $1, 2, \ldots, 12$ korvataan luvulla 13?

7. Onko olemassa positiivisia reaalilukuja a, b, c, x, joille pätee $a^2 + b^2 = c^2$ ja $(a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2$?

8. Olkoon $a, b, c > 3$ alkulukuja. Osoita, että $(a-b)(b-c)(a-c)$ on jaollinen luvulla 48.

9. Sanomme, että $n \in \mathbb{N}$ on k-ykkösluku, jos n:n kymmenjärjestelmäesitys koostuu k kpl ykkösestä. Siis esim. 11 on 2-ykkösluku.

Osoita, että on olemassa $k' \in \mathbb{N}$, jolle k-ykkösluku on jaollinen luvulla 37 aina, kun k on jaollinen luvulla k'.

Vaikeampia tehtäviä

10. Yksikköneliön sisään piirretään äärellinen määrä ympyröitä, joiden kehien yhteenlaskettu pituus on 10. Osoita, että neliön läpi voidaan vetää jana, joka leikkaa vähintään neljää ympyrää.

11. Merkitään Pascalin kolmiota niin, että $P(1,1)$ on Pascalin kolmion huippu, $P(2,1), P(2,2)$ on toinen rivi jne. Olkoon $n \in \mathbb{N}$, ja $1 \leq k \leq 2^n$. Osoita, että $P(2^n, k) \equiv 1 \mod 2$.

12. Olkoon x, y positiivisia reaalilukuja, joille $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$. Määritä tulon xy suurin arvo.

13. Päivälliskutsuilla on n vierasta ja n isäntää, $n \geq 4$. He istuvat pyöreän pöydän ympärillä jossain järjestyksessä. Kaksi vierasta pystyy keskustelemaan keskenään, jos heidän välissään on korkeintaan yksi henkilö, tai jos heidän välissään on täsmälleen kaksi henkilöä, joista vähintään toinen on isäntä.

Osoita, että kutsuilla on vähintään n paria vieraita, jotka pystyvät keskustelemaan keskenään.

14. Olkoon P äärellinen, vähintään viiden tason pisteen joukko. Osa P:n pisteistä on väritetty punaisiksi ja loput sinisiksi. Oletamme, että mitkään kolme samanväristä pistettä eivät sijaitse samalla suoralla.

Osoita, voidaan muodostaa kummatkin seuraavat ehdot toteuttava jana:

- Janan päätepisteet ovat joukon P keskenään samanvärisiä pisteitä.
- Jana ei sisällä muita joukon P pisteitä kuin päätepisteet.

15. Olkoon $N = \mathbb{N} \setminus 0$. Etsi kaikki funkiot $f\colon N \to N$, jotka toteuttavat ehdon

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$

kaikilla $n \in N$.

16. On annettu n rivistä ja m sarakkeesta koostuva taulukko, $n > m$, jonka jokaisessa solussa on ei-negatiivinen reaaliluku. Jos solussa (i, j) (i rivi, j sarake) on positiivinen reaaliluku, rivin i solujen summa on sama kuin sarakkeen j solujen summa.

Osoita, että taulukossa on rivi, joka koostuu pelkistä nollista.

17. Oletetaan, että n, $n \geq 1$, äärettömän pientä pelinappulaa on asetettu tason joihinkin pisteisiin. Samassa pisteessä voi sijaita useampi pelinappula. Yksi pelaaja pelaa peliä, jossa hän valitsee kaksi pelinappulaa, jotka sijaitsevat joissain pisteissä A ja B, ja siirtää ne janan AB keskipisteeseen. Kutsumme pelin alkutilannetta ratkeavaksi, jos pelaajan on mahdollista siirtää jonolla tällaisia siirtoja kaikki pelinappulat samaan pisteeseen.

Millä n:n arvoilla kaikki n:n kokoiset alkutilanteet ovat ratkeavia?

18. Tutkitaan funktioita $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $n > 0$. Kutsutaan näitä totuusfunktioiksi.

Määritellään $f\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 0$.

Esimerkiksi funktio $g\colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, $g(0,0) = g(1,1) = g(0,1) = 1$, $g(1,0) = 0$ voidaan esittää f:n avulla $g(a,b) = f(a, f(b,b))$.

Osoita, että jokainen totuusfunktio voidaan esittää samaan tapaan f:n avulla.