Huhtikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 23.6.2022 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Kahta tavallista noppaa heitetään. Mikä on todennäköisyys, että saatujen kahden silmäluvun tulo on jaollinen luvulla viisi?

2. Tarkastellaan kahte peräkkäistä paritonta kokonaislukua. Niistä suurempi on kolme kertaa pienemmän kokoinen. Mikä on näiden lukujen summa?

3. Etsi sellaiset a, b, että $(x^2 - 3x + 2) \mid (ax^4 + bx^3 + 1)$.

4. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio. Olkoon M nelikulmion sisäpiste. Osoita, että $|AM|+|MB| \leq |AD|+|DC|+|CB|$.

5. Olkoon ABC kolmio, missä kulma BAC on suora kulma, ja kulma BCA on $30°$. Sivulle BC piirretään keskinormaali. Se leikkaa sivun AB jatkeen pisteessä X. Osoita, että kolmio BCX on tasasivuinen.

6. Kolmen hengen jalkapallossa yksi pelaajista on maalivahti ja kaksi muuta pelaajaa toisiaan vastaan pelaavia kenttäpelaajia. Kun kenttäpelaaja tekee maalin, hän siirtyy maalivahdiksi ja maalivahti siirtyy kenttäpelaajaksi.

Messi, Maradona ja Pele pelasivat jonkun aikaa tätä peliä. Sen jälkeen he kertoivat Gödelille, että Messi oli ollut kenttäpelaajana 10 kierroksella, Maradona 17 kierroksella ja Pele 15 kierroksella. Tällöin Gödel sanoi tietävänsä, kuka kuka teki kuudennen maalin. Kuka se oli?

7. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa ehdon $f(x+y) \geq f(xy)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Osoita, että f on vakiofunktio, eli että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

8. Osoita, että positiivisilla reaaliluvuilla a, b, c pätee

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Milloin pätee yhtäsuuruus?

9. *Alkuun vähän teoriaa. Luku e on tietty irrationaaliluku, jonka yksidesimaalinen likiarvo on* $2,7$. *Funktio* $\ln$ *määritellään niin, että jos* $e^x = y$, *niin* $\ln y = x$. *Funktio* $\ln x$ *on määritelty aina, kun* $x > 0$.

Funktio $\ln$ *tottelee seuraavia laskusääntöjä:* $\ln xy = (\ln x) + (\ln y)$, $\ln(x^n) = n \ln x$ *ja* $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$.

Ja nyt se tehtävä...

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n > 0$ reaalilukuja. Osoita, että

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n}.$$

10. Pöydällä on kolme kasaa, joissa kussakin on n pikkukiveä, $n > 0$. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa peliä: Vuorollaan pelaaja ottaa valitsemastaan kasasta valitsemansa määrän kiviä (kuitenkin vähintään yhden.) Pelin voittaa se, joka tekee siirron, jonka jäljiltä pöydällä ei ole yhtään kiveä.

Osoita, että voittostrategia on pelin aloittajalla.

11. Etsi kaikki luvut $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, jolle n on neliö, ja n:n kymmenjärjestelmäesityksen kaikki numerot ovat nelosia.

12. Kolmion kulmat ovat α, β ja γ. Kolmion sisään piirretyn ympyrän sisään piirretään kolmio kärkinään alkuperäisen kolmion ja ympyrän leikkauspisteet. Määritä näin syntyneen kolmion kulmat.

Vaikeampia tehtäviä

13. Etsi kaikki parit $n, m \in \mathbb{N}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2.$$

14. Olkoon $a \neq b$ reaalilukuja, joille

$$a^4 - 2022a = b^4 - 2022b > 0.$$

Osoita, että $ab < 0$.

15. Olkoon a, b, c positiivisia kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Mitä kokonaislukuarvoja lauseke

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

voi saada?

16. Kuinka monella positiivisella kokonaislukuparilla a, b pätee

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2022}?$$

17. Ympyrän kehälle on merkitty 18 pistettä tasavälein. Osa näistä pisteistä on väritetty. Sanomme, että väritys on hyvä, jos väritettyjen pisteiden joukosta löytyy neljä, jotka ovat suorakulmion kulmapisteet. Mikä on suurin väritettyjen pisteiden määrä, jolla löytyy ei-hyvä väritys?

18. Olkoon A, B, C kolme pistettä ympyrän kehällä, ja olkoon M kyseisen ympyrän keskipiste. Olkoon M' pisteen M peilaus janan AB suhteen. Oletamme, että pisteet A, B, C on valittu niin, että M' on kolmion ABC sisällä, ja lisäksi M' on kulmien CAB ja CBA puolittajien leikkauspiste. Jana AM leikkaa uudestaan ympyrää pisteessä D.

Osoita, että $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

19. Olkoon AB jana, ja piirretään ympyrä ω jana AB halkaisijana. Olkoon O ympyrän keskipiste ja OC ympyrän säde, joka on kohtisuorassa janaa AB vastaan. Olkoon M sisäpiste janalla OC.

Olkoon N ympyrän ω ja N janan AM jatkeen leikkauspiste (joka siis on se muu leikkauspiste kuin A). Piirretään ympyrälle ω tangentit pisteisiin N ja B. Olkoon P näiden tangenttien leikkauspiste.

Osoita, että voidaan piirtää ympyrä, jonka kehällä sijaitsevat pisteet M, O, P, N

20. Olkoon V suuntaamaton verkko, jossa on 2019 solmua. Verkon kääntö solmussa v tarkoittaa verkon muuttamista niin, että kaikille muille solmuille v' verkosta poistetaan kaari (v, v'), jos tällainen kaari ennen kääntöä oli, ja verkkoon lisätään kaari (v, v'), jos tällaista kaarta ei ennen kääntöä ollut.

Verkkoa kutsutaan minimoiduksi, jos sen kaarien lukumäärää ei enää saa pienennettyä jonolla kääntöjä. (Jonossa samaa solmua saa kääntää useaan kertaan.)

Mikä on suurin mahdollinen kaarien määrä minimoidulle 2019 solmun verkolle?

21. Yksikköneliö jaetaan suorakulmioihin, joiden sivut ovat yksikköneliön sivujen suuntaisia. Osa suorakulmioista väritetään punaisiksi ja loput valkoisiksi, kuitenkin niin, että punaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa on sama kuin valkoisten suorakulmioiden pinta-alojen summa.

Jokaisen punaisen suorakulmion sisään kirjoitetaan sen korkeuden ja leveyden osamäärä. Jokaisen valkoisen suorakulmion sisään kirjoitetaan sen leveyden ja korkeuden osamäärä.

Osoita, että pienin mahdollinen arvo edellämainittujen osamäärien summalle on $2\frac{1}{2}$.