Kesän valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 11.9.2022 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Crawford on pelaamassa backgammonia. Hänellä on nappula seitsemän askeleen päässä vastustajan nappulasta sekä toinen nappula viiden askeleen päässä vastustajan nappulasta. Crawford heittää kahta noppaa ja saa syötyä vastustajan nappulan, jos noppien silmälukujen summa on 5 tai 7, tai jos jommastakummasta nopasta tulee viitonen.

Millä todennäköisyydellä Crawford saa syötyä vastustajan nappulan?

2. Culbertson on pelaamassa bridgeä. Hänen oikeanpuoleisella vastustajallaan on 13 tavallisesta pakasta jaettua pelikorttia, samoin hänen vasemmanpuoleisella vastustajallaan. Culbertson tietää, että näiden korttien joukossa on patajätkä ja patarouva. Culbertson voittaa jaon, jos on käynyt niin onnekkaasti, että nämä ovat samalla pelaajalla. Millä todennäköisyydellä Culbertson voittaa?

3. Määritellään positiivisille kokonaisluvuille a, b laskutoimitukset $\circ_n$. Ensinnäkin $a \circ_1 b = a + b$ ja induktiivisesti

$$a \circ_{n+1} b = a \circ_n (a \circ_n (a \circ_n (\cdots \circ_n a))),$$

missä a:ita on oikealla puolen b kappaletta. Siis esimerkiksi $a \circ_2 b = ab$ ja $a \circ_3 b = a^b$.

Osoita, että $2 \circ_n 2 = 4$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

4. Kansanedustajien palkka päätettiin määrätä kansanäänestyksellä. Jokainen äänestäjä kirjoittaa äänestyslappuun luonnollisen luvun. Kaikkien näiden lukujen keskiarvo (pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun) on se euromäärä, jonka kukin kansanedustaja saa kuussa.

Äänestäjiä on alle 5 miljoonaa, ja myös kansanedustajat itse saavat äänestää. Osoita, että kansanedustaja Luihunen voi omalla äänestyskäyttäytymisellään varmistaa, että hän saa vähintään miljoona euroa kuussa.

5. Pelikorttipakassa on numeroidut kortit 1-100, yksi kortti kutakin numeroa. Pelaaja pelaa yksinpeliä, jossa hän ensin jakaa kaksi korttia. Olkoon pienempi kortti a ja suurempi b. Sitten hän jakaa yhden kortin c. Pelaaja voittaa, jos kortti c on arvoltaan korttien a ja b välissä.

Millä todennäköisyydellä pelaaja voittaa pelin?

6. Tavallisten laskusääntöjen mukaan alla oleva potenssi lasketaan seuraavasti:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = 65536.$$

Mikäli potenssien korotukset tehtäisiinkin eri järjesteyksessä, esimerkiksi laskettaisiin $\left(2^2\right)^{2^2} = 256$, niin kuinka monta erilaista mahdollista lopputulosta laskulle on?

7. Tutkitaan jonoa

$$1 * 2 * 3 * \cdots * 2022.$$

Jonossa jokainen $*$ saadaan korvata joko $+$(plus)-merkillä tai $-$(miinus)-merkillä. Mikä on pienin positiivinen arvo, joka lausekkeelle on näin mahdollista saada?

8. Äärettömän pieni kirppu loikkii loputtomasti yksikköympyrän kehällä. Se aloittaa jostain yksikköympyrän pisteestä ja loikkii vastapäivään. Jokaisella loikalla se ylittää kaaren pituuden $2\pi x$, missä $0 < x \leq 1/2$ on reaaliluku. (Kaikki loikat ovat siis yhtää pitkiä.) Millä x:n arvoilla kirppu käy vähintään kahdesti samassa pisteessä?

9. Olkoon n luonnollinen luku ja k luonnollinen luku, joka on jaollinen kahdella muttei neljällä. Osoita, että on mahdotonta, että sekä n että $n + k$ ovat neliölukuja.

10. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = \frac{1}{8}$. Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

Vaikeampia tehtäviä

11. Peräkkäisistä luonnollisista luvuista muodostetaan äärellinen jono. Vain jonon ensimmäisen ja viimeisen luvun numeroiden summat ovat jaollisia kahdeksalla.

Kuinka pitkä jono voi pisimmillään olla?

12. Olkoon A säännöllinen n-kulmio tasossa aseteltuna niin, että se on symmetrinen y-akselin suhteen. Sanomme, että kuvion A kierto tai peilaus on kuvion A symmetria, jos se vie A:n itselleen. Olkoon k kuvion A kierto $360/n$ astetta vastapäivään ja p kuvion A peilaus y-akselin suhteen.

Osoita, että jokainen A:n symmetria voidaan esittää jonona k:ita ja p:itä.

13. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on vähintään 4 positiivista jakajaa, ja joille

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

kun $d_1, \ldots, d_4$ ovat luvun n neljä pienintä positiivista jakajaa.

14. Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ sekä $y_1, \ldots, y_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots, x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

15. Olkoon a, b, c kolmion sivujen pituudet ja S sen pinta-ala. Osoita, että

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

16. On kaksi sallittua operaatiota: Luvun kertominen kahdella ($\times 2$) sekä kolmen vähentäminen luvusta (-3). Muodostetaan jono sallittuja operaatioita, joilla luvusta 11 päästään lukuun 25. Mikä on pienin mahdollinen pituus tälle jonolle?

17. Suositun mätkintävideopelin maailmanmestaruusturnauksessa oli 1000 osanottajaa. He pelasivat keskenään joukon pelejä; yhteen peliin osallistui aina kaksi osanottajaa, eikä mikään pari pelannut keskenään enempää kuin yhden pelin.

Turnauksen jälkeen todettiin, että jokaisesta sellaisesta parista, joka oli pelannut keskenään pelin löytyi pelaaja, joka oli pelannut korkeintaan 20 peliä.

Osoita, että turnauksessa pelattiin yhteensä korkeintaan $980 \cdot 20$ peliä.

18. Ratkaise yhtälö

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3,$$

kun a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

19. Sanomme että äärellinen jono L luonnollisia lukuja on hyvä, jos sen suurin jäsen esiintyy jonossa vain yhden kerran. Sanomme, että jono L' on jonon L alijono, jos L' muodostuu jonon L peräkkäisistä jäsenistä. Siis esimerkiksi 376 on jonon 93761 alijono. Sanomme, että L on superhyvä, jos sen jokainen alijono on hyvä.

Superhyvä jono, jonka pituus on 2000 jäsentä, yritetään tehdä käyttäen niin pieni määrä eri lukuja kuin mahdollista. Mikä on pienin määrä eri lukuja, joilla homma onnistuu?