Syyskuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 23.10.2022 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon a, b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^2 + b^2 \geq \frac{3}{2}ab.$$

2. Iso kuutio koostuu $3 \times 3 \times 3$ läpinäkymättömästä pikkukuutiosta. Isosta kuutiosta poistetaan pikkukuutioita niin, että seuraava pätee jokaiselle ison kuution tahkolle: Kun tahkon keskimmäistä pikkuneliötä katsotaan, siitä näkyy ison kuution läpi. Pikkukuutioita poistetaan pienin mahdollinen määrä, jolla edellämainittu onnistuu.

Kuinka monta pikkukuutiota isoon kuutioon jää?

3. Olkoon $x_1, \ldots, x_8$ kokonaislukuja, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_i = 0$ muuten. On kolme sallittua operaatiota kaikilla kokonaisluvuilla k:

- Lukuun x_1 lisätään $2k$, luvusta x_2 vähennetään k ja luvusta x_8 vähennetään k.
- Lukuun x_8 lisätään $2k$, luvusta x_7 vähennetään k ja luvusta x_1 vähennetään k.
- Lukuun x_i, $1 < i < 8$, lisätään $2k$, luvusta x_{i-1} vähennetään k ja luvusta x_{i+1} vähennetään k.

Osoita, että millään jonolla sallittuja operaatioita ei päästä tilanteeseen, missä $x_i = 0$ kaikilla i.

4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että välillä $0, \ldots, n-1$ on vähintään $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ lukua k, joille yhtälöllä $x^2 \equiv k \mod n$ ei ole ratkaisua.

$\lceil y \rceil$ on pienin kokonaisluku, joka on vähintään y.

5. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor$$

luonnollisten lukujen joukossa? $\lfloor y \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan y.

6. Jasminilla on kaksi laatikkoa, laatikko A ja laatikko B. Laatikossa A on 20 simpukankuorta, ja laatikko B on tyhjä. Jasmin pelaa peliä, missä on kaksi erilaista sallittua askelta.

1. Jasmin voi siirtää yhden simpukankuoren laatikosta A laatikkoon B.
2. Jasmin voi poistaa laatikosta A simpukankuoria k kappaletta, missä k on laatikon B simpukankuorien lukumäärä (tai kaikki simpukankuoret laatikosta A, jos siinä on alle k simpukankuorta.)

Jasmin yrittää tyhjentää laatikon A niin pienellä määrällä sallittuja askeleita kuin mahdollista. Mikä on pienin määrä sallittuja askeleita, jolla homma onnistuu?

7. Jarno on tekemässä terveystiedon monivalintakoetta. Kokeessa on 100 kohtaa, ja jokaisessa kohdassa on kaksi vaihtoehtoa, A ja B, joista jompikumpi on oikea vastaus.

Jarnon opettaja on lepsu, ja niinpä hän on kertonut, että jokaisessa peräkkäisessä viidessä kohdassa on täsmälleen kolme kohtaa, joihin A on oikea vastaus. Ennen kokeen alkua opettaja vielä paljastaa, että ensimmäiseen ja viimeiseen kohtaan B on oikea vastaus.

Jarnolta on jäänyt terveystiedon opiskelu vähemmälle, mutta hän on ahkerasti treenannut matematiikkaolympialaisiin, ja hän tajuaa, että kokeen pystyy tekemään täysin oikein pelkästään opettajan paljastusten avulla. Määritä kokeen oikeat vastaukset.

8. 1000×1000 ruudun ruudukon jokaisessa ruudussa on robotti. Kun käyttäjä painaa start-nappulaa, jokaisella robotilla on kaksi mahdollisuutta:

- Pysyä samassa ruudussa.

- Siirtyä viereiseen ruutuun (kaksi ruutua ovat vierekkäisiä, jos niillä on yhteinen sivu.)

Samassa ruudussa saa siirtymän jälkeen olla useampi robotti. Robotit on ohjelmoitu niin, että start-nappulan painamisen jälkeen ne jättävät mahdollisimman monta ruudukon ruutua tyhjäksi, ja ne koordinoivat tämän yhdessä.

Olkoo n niiden ruutujen lukumäärä, joissa on robotti siirtymän jälkeen. Osoita, että $200000 \leq n < 203000$.

9. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jossa kaikki kulmat ovat alle 180 astetta. Olkoon J janan BA jatke A:sta eteenpäin ja J' janan CD jatke D:stä eteenpäin. Oletetaan, että J ja J' leikkaavat, olkoon E leikkauspiste. Olkoon K janan CB jatke B:stä eteenpäin ja K' janan DA jatke A:sta eteenpäin. Oletetaan, että K ja K' leikkaavat, olkoon F leikkauspiste.

Oletetaan, että kolmioilla BDF ja BDE on sama ala. Osoita, että janat BD ja EF ovat yhdensuuntaiset.

10. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Vaikeampia tehtäviä

11. 5-kulmion jokaiseen sivuun ja kärkeen merkitään positiivinen kokonaisluku niin, että käytetään 10 eri lukua. Lisäksi tämä tehdään niin, että kun lasketaan yhteen sivun luku ja sen viereisten kärkien luvut, saadaan vakioarvo, joka ei riipu sivun valinnasta.

Mikä on yllä pienin mahdollinen sivun ja sen viereisten kärkien lukujen summa?

12. Olkoo ABC kolmio. Sivulta AC valitaan piste E ja sivulta AB piste F. Olkoon janojen BE ja CF leikkauspiste P. Tiedetään seuraavat:

- Kolmion PEC ala on 7.
- Kolmion PFB ala on 4.
- Kolmion PBC ala on 8.

Määritä nelikulmion $AEPF$ ala.

13. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > 1$ pätee $(n-1)^2 | n^{n-1} - 1$.

14. Olkoon S joukko, joka sisältää n positiivista reaalilukua, $n \geq 3$. Osoita, että korkeintaan $n-2$ eri kolmosen potenssia voidaan kirjoittaa summana kolmesta eri S:n alkiosta.

15. Olkoon a, b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b.$$

,

16. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja.

Osoita, että

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(a-c)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon $T \subset S$ epätyhjä. Sanomme, että T on tasapainoinen, jos T:n alkioiden mediaani on sama kuin T:n alkioiden keskiarvo. Osoita, että tasapainoisten S:n osajoukkojen määrä on pariton.

Joukon T alkioiden mediaani on $t \in T$, jos joukossa T on yhtä monta t:tä suurempaa lukua kuin t:tä pienempiä lukuja. Jos taas joukossa T on luvut $t_0 < t_1$, joille t_0:n ja t_1:n välissä ei ole T:n lukuja, ja on yhtä monta t_0:aa pienempää T:n lukua kuin t_1:tä suurempia T:n lukuja, T:n alkioiden mediaani on lukujen t_0 ja t_1 keskiarvo.

18. Olkoon $x_1, \ldots, x_n$ reaalilukuja, joille

$$\sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k, x_{k+1}) = \min(x_1, x_n).$$

Osoita, että $\sum_{k=2}^{n-1} x_k \geq 0$.

Huom! $\min(a, b)$ *on pienempi luvuista* a, b.

19. 2-ulotteisessa koordinatistossa on annettu monitahokas M, jonka pinta-ala on suurempi kuin 1. Osoita, että M:ssä on 2 eri pistettä (x, y) ja (x', y'), joille $x - x'$ ja $y - y'$ ovat kokonaislukuja. (Nämä pisteet voivat sijaita joko M:n sisällä tai reunalla.)

20. 12 ritaria istuu (tasavälein) pyöreän pöydän ääreen. Kun he ovat istuneet, he huomaavat, että pöydässä on paikoilla nimilaput, jotka luonnollisesti eivät vastaa ritarien nykyisiä istumapaikkoja.

Osoita, että vähintään kaksi ritaria istuu omilla paikoillaan, tai sitten pöytää on mahdollista pyöräyttää niin, että vähintään kaksi ritaria istuu nimilappuja vastaavilla paikoilla pyöräytyksen jälkeen.