Lokakuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 4.12.2022 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Määritä kaikki lukuparit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, joille tulo ab on jaollinen luvulla 6, ja $a \leq b$.

2. Muodostetaan vihko taittamalla keskenään samankokoisia paperiarkkeja kahtia ja laittamalla taitetut arkit sisäkkäin. Nidotaan vielä selästä arkit toisiinsa kiinni. (Edellä on siis kuvattu ihan tavallisen vihkon tekotapa.) Lasketaan vihkon sivujen lukumäärä, kun myös kansiksi ja sisäkansiksi sattuneet sivut lasketaan sivuiksi.

Voiko näin syntyneessä vihkossa olla tasan 22 sivua? Entä 24?

3. Shakkilaudan jossain ruudussa on nappula. Nappulan siirto tarkoittaa sen siirtämistä viereiseen ruutuun vaaka- tai pystysuoraan, mutta ei vinottain. Nappulaa siirretään näin 11 kertaa. Osoita, että nappula ei ole näiden 11 siirron jälkeen siinä ruudussa, missä se oli alussa.

4. Olkoon S ympyrä, jonka säde on 1 ja keskipiste P. Olkoon T ympyrä, jonka säde on $\frac{1}{2}$, ja jolle piste P sijaitsee ympyrän T sisällä. Osoita, että ympyrä T sijaitsee ympyrän S sisällä.

Huom! Olkoon A ympyrä. Ympyrän A kehän pisteiden ei katsota sijaitsevan ympyrän A sisällä.

5. Olkoon G suuntaamaton verkko. A ja B pelaavat seuraavaa peliä: Ensin A asettaa kaksi pelinappulaa verkon joihinkin solmuihin. Sitten varsinainen peli alkaa, ja B aloittaa sen. Vuorollaan B siirtää jopaakumpaa pelinappulaa verkon solmusta toiseen verkon särmää pitkin. Vuorollaan A poistaa verkosta yhden särmän.

A voittaa pelin, jos B:llä ei ole yhtään laillista siirtoa jäljellä. B voittaa, jos hän saa kummankin pelinappulan siirrettyä samaan solmuun.

Määritä kaikki verkot G, joille B:llä on pelissä voittostrategia.

6. Määritellään $a_1 = 5$, ja induktiivisesti $a_{i+1} = 7 + a_i$. Osoita, että yksikään luku tässä äärettömässä jonossa ei ole neliöluku.

7. Osoita, että on olemassa joukko S, joka koostuu viidestä tason pisteestä, ja joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- Mitkään kolme joukon S pistettä eivät ole samalla suoralla.
- On vain yksi joukon S neljän pisteen osajoukko T, jolle T:n pisteet ovat konveksin nelikulmion kärjet.

Monikulmio on konveksi, jos sen kaikki kulmat ovat alle 180 astetta.

8. 15 joukkuetta pelaa lentopallosarjan. Jokainen joukkue pelaa kerran jokaista muuta joukkuetta vastaan, ja jokaisessa pelissä toinen joukkueista voittaa ja toinen häviää.

Jatkoon pääsevät ne joukkueet, jotka ovat hävinneet korkeintaan kolme peliä.

(a) Osoita, että on mahdollista, että seitsemän joukkuetta pääsee jatkoon.

(b) Osoita, että on mahdotonta, että kahdeksan joukkuetta pääsee jatkoon.

9. Olkoot a, b, c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$\frac{(a^{2022} + b^{2022})(a + c)}{b} + \frac{(b^{2022} + c^{2022})(b + a)}{c} + \frac{(c^{2022} + a^{2022})(c + b)}{a} > 2(a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}).$$

10. Väriliituja on neljää eri väriä, kuusi liitua jokaista väriä. Ne on jaettu kuudelle lapselle niin, että jokaisella lapsella on neljä liitua.

Kuvataideohjaaja valitsee osan lapsista piirtämään yhteistä kuvaa. Jokainen lapsi käyttää niitä liituja joita hänellä on, ja kuvataideohjaaja valikoi lapset niin, että kuvaan tulee jokaista väriä. Lisäksi kuvataideohjaaja valitsee niin pienen määrän lapsia kuin mahdollista.

Mikä on suurin määrä lapsia, jonka kuvataideohjaaja voi joutua valitsemaan?

Vaikeampia tehtäviä

11. Meillä on $10 \times 10 \times 1$ yksikön kokoinen laatikko. Sinne pitäisi saada mahtumaan 106 palloa, joiden läpimitta on 1. Kuinka homma onnistuu?

12. Positiiviset kokonaisluvut m, n, k toteuttavat yhtälön

$$m^2 + n = k^2 + k.$$

Osoita, että $m \leq n$.

13. Luonnollisen luvun n kymmenjärjestelmäesityksessä on $6k$ numeroa (k luonnollinen luku), ja n on jaollinen luvulla 7. Osoita, että kun n:n viimeinen (ykkösiä osoittava) numero siirretään luvun ensimmäiseksi, saatu luku on edelleen jaollinen luvulla 7.

14. 8×8 -shakkilaudalle laitetaan n tornia niin, että kaikille tornipareille (a, b) pätee seuraava: Laudalla on tyhjä ruutu, jota sekä a että b uhkaa.

Mikä on suurin n:n arvo, jolla tämä onnistuu?

Torni t uhkaa tyhjää ruutua r, jos t ja r ovat joko samalla pysty- tai vaakarivillä, eikä t:n ja r:n välissä ole nappuloita.

15. Olkoon a, b, c reaalilukuja, joille $s_n = a^n + b^n + c^n$ kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla.

Oletetaan lisäksi, että $s_1 = 2$, $s_2 = 6$ ja $s_3 = 14$.

Osoita, että kaikillla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > 1$ pätee

$$|s_n^2 - s_{n+1}s_{n-1}| = 8.$$

16. Määritellään $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = (n+1)(a_1 + \cdots + a_n)$.

Millä n:n arvoilla a_n on jaollinen luvulla $n!$.

17. Taululle on kirjoitettu luvut $1, 2, \ldots, 2022$. Allan pelaa peliä, jossa hän valitsee taululta kaksi lukua a, b, poistaa ne taululta ja kirjoittaa taululle lukujen a, b keskiarvon. 2021 askeleen jälkeen taululla on vain yksi luku c.

Osoita, että c:ksi voidaan jättää mikä tahansa kokonaisluku luvusta 2 lukuun 2021.

18. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Tutkitaan kaikkia äärettömiä, luonnollisilla luvuilla indeksöityjä luonnollisten lukujen jonoja (a_i), jotka eivät ole vakiojonoja, ja jotka toteuttavat rekursioyhtälön

$a_{i+1} = (k+1)a_i - ka_{i-1}$.

Kutsutaan kaikkien tällaisten jonojen joukkoa G_k:ksi. Sanomme, että $(a_i) \in G_k$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin $(b_i) \in G_k$, jos $a_i \leq b_i$ kaikilla indekseillä i. Osoita, että G_k:ssa on pienin alkio, ts. alkio (a_i), jolle (a_i) on pienempi tai yhtäsuuri kuin (b_i) kaikilla $(b_i) \in G_k$.

19. Olkoon S viiden tason pisteen joukko. Joukon S pisteistä mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että joukon S pisteistä voidaan valita neljä, jotka ovat konveksin nelikulmion kärjet.

20. Olkoon S äärellinen joukko tason pisteitä, $|S| \geq 3$ niin, että aina kun S:stä valitaan kolme pistettä, ne voidaan peittää ympyränmuotoisella kiekolla, jonka säde on 1.

Osoita, että koko S voidaan peittää ympyränmuotoisella kiekolla, jonka säde on 1.