Joulun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 15.1.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon $x > 0$. Olkoon y_0 sellaisen ympyrän kehän pituus, jonka halkaisija on x.

Olkoon A joukko ympyröitä niin, että niiden halkaisijoiden summa on x. Olkoon y_1 kyseisten ympyröiden kehien pituuksien summa.

Määritä $y_0 - y_1$.

2. Pöydällä on lappuja, joissa kussakin on jokin numero 1-100, täsmälleen kaksi lappua kutakin numeroa.

Kaksi pelaajaa pelaa peliä, jossakin kumpikin pelaaja ottaa vuorollaan lapun pöydältä.

Kun kumpikin on pelannut 20 vuoroa, peli loppuu. Kumpikin pelaaja saa pisteen jokaisesta ottamastaan lappuparista, joissa on sama numero. Se pelaaja voittaa, jolla on enemmän pisteitä. Jos kummallakin on sama määrä pisteitä, peli on tasapeli.

Osoita, että peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin, eli että kumpikin voi estää toista voittamasta.

3. Sama tehtävä kuin Tehtävä 2, paitsi, että jokaista numeroa on alussa neljä kappaletta. Pisteenlaskussa on vielä lisätarkennus, että kukin lappu voidaan laskea korkeintaan yhteen pisteitä antavaan pariin.

4. Pelataan samaa peliä kuin Tehtävässä 2, paitsi, että peli loppuu vasta kun kaikki laput on otettu.

Osoita, että peli on nyt tasapeli riippumatta pelaajien pelistrategioista.

5. Riikka ajaa kotoa mummolaan mopoautolla. Matkaa koostuu kolmesta erilaisesta tieosuudesta. Jokaisella näistä kolmesta tieosuudesta Riikka ajaa vakionopeudella (joka voi olla eri nopeus eri tieosuuksilla).

Kun Riikka on ajanut 30% matkasta, hän on käyttänyt alle 30% matkan kokonaisajasta. Kun Riikka on ajanut 50% matkasta, hän on käyttänyt yli 50% matkan kokonaisajasta.

Onko mahdollista, että kun Riikka on ajanut 70% matkasta, hän on käyttänyt alle 70% matkan kokonaisajasta?

6. Olkoon S säännöllinen 2000-kulmio. Osoita, että jos S:stä valitaan 1501 kärkeä ja piirretään monikulmio, jonka kärkiä nämä ovat, väistämättä syntyvässä 1501-kulmiossa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla i, $1012 \leq i \leq 2022$ löytyy n:n tekijä n_i (jonka ei ole pakko olla alkutekijä), jolle $n_i \equiv i \mod 2023$.

Osoita, että vastaava n_i löytyy kaikilla $1 \leq i \leq 2022$.

8. 101 viisasta miestä seisoo ringissä. Kullakin miehellä on toinen kahdesta mahdollisesta mielipiteestä: Joko että kuu on Emmentaalia, tai että kuu on Edamia.

Kaikki sanovat mielipiteensä ääneen. Tämän jälkeen kukin viisas mies vaihtaa mielipidettään, jos hän seisoo kahden sellaisen miehen välissä, jotka ovat eri mieltä kuin hän.

Edellisessä kappaleessa kuvattua operaatiota toistetaan. Osoita, että lopulta päästään tilanteeseen, jossa kukaan ei enää muuta mieltään.

9. Ympyrän kehällä on 99 lukua. Jos a ja b ovat kaksi vierekkäistä lukua, yksi seuraavista pätee

- $|a - b| = 1$.
- $|a - b| = 2$.
- $\frac{a}{b} = 2$ tai $\frac{b}{a} = 2$.

Osoita, että ympyrän kehällä on luku, joka on kolmella jaollinen.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon $\angle BAC$ kulma, ja ω kulman sisään piirretty ympyrä, joka tangeeraa kulman kylkiä pisteissä B ja C. Olkoon ℓ suora, joka leikkaa suoria AB ja AC pisteissä K ja L, sekä ympyrää ω pisteissä P ja Q. Pisteet S ja T ovat suoralla BC siten, että KS ja AC ovat yhdensuuntaisia ja TL ja AB ovat yhdensuuntaisia.

Olkoon R suorien PQ ja BC leikkauspiste.

Osoita, että pisteet P, Q, S, T sijaitsevat saman ympyrän kehällä.

11. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretään ympyrä Ω. Piirretään ympyrälle Ω tangentit pisteisiin B ja C. Olkoon P näiden leikkauspiste. Pisteet D ja E ovat suorilla AB ja AC niin, että PD ja PE ovat kohtisuorassa suoria AB ja AC vastaan.

Osoita, että kolmion ADE korkeusjanojen leikkauspiste on sivun BC keskipiste.

12. Olkoon ω_1 ja ω_2 ympyröitä, keskipisteinään O_1 ja O_2. Oletetaan, että ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Piirretään ympyröille ω_2 ja ω_1 tangentit pisteeseen A. Nämä leikkaavat suorat O_1B ja O_2B pisteissä K ja L.

Osoita, että suorat KL ja O_1O_2 ovat yhdensuuntaisia.

13. Olkoon $a_1, \ldots, a_{11}$ luonnollisia lukuja, ja jotka ovat vähintään 2, ja joiden summa on 407. Olkoon n luonnollinen luku. Lasketaan yhteen jakojäännökset, kun n jaetaan luvuilla $a_1, \ldots, a_{11}, 4a_1, \ldots, 4a_{11}$.

Onko mahdollista, että kyseinen jakojäännosten summa on 2012?

14. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kutsutaan n:n päätekijöiksi kahta suurinta luvun n tekijää, jotka eroavat luvusta n.

Olkoon nyt a ja b positiivisia kokonaislukuja, joilla on samat päätekijät. Osoita, että $a = b$.

15. Olkoon a, b, c, d positiivisia reaalilukuja, joille

$$2(a + b + c + d) \geq abcd.$$

Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$

16. Olkoon a, b, c, d positiivisia kokonaislukuja, joille $c > b$. Oletetaan lisäksi $a + b + c + d = ab - cd$. Osoita, että $a + c$ ei ole alkuluku.

17. Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ astetta 10 olevia polynomeja niin, että kummankin kymmenennen asteen kerroin on 1. Lisäksi oletetaan, että yhtälöllä $P(x) = Q(x)$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

Osoita, että yhtälöllä $P(x - 1) = Q(x + 1)$ on reaalinen ratkaisu.

18. Olkoon S konveksi n-kulmio, n pariton.

S:ään piirretään kärkiä yhdistäviä janoja, kuitenkin niin, että mikään jana ei yhdistä kahta vierekkäistä kärkeä.

Sanomme, että jana on hyvä, jos se leikkaa täsmälleen yhtä toista janaa S:n sisällä.

Mikä on suurin määrä hyviä janoja, joka monikulmiossa voi olla?