Huhtikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 23.6.2022 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Kahta tavallista noppaa heitetään. Mikä on todennäköisyys, että saatujen kahden silmäluvun tulo on jaollinen luvulla viisi?

1. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36}$.

Kahden luvun tulo on jaollinen luvulla viisi täsmälleen silloin, kun ainakin toinen niistä on jaollinen luvulla viisi. Siispä ainakin toisen nopan silmäluvun on oltava tasan viisi. Tapauksia on siis kolme: molempien, toisen tai sitten toisen nopan silmäluku on viisi. Yhteensä kahta noppaa heitettäessä on $6 \cdot 6 = 36$ mahdollista tulosta. Näistä 6 on sellaisia, että ensimmäisen nopan silmäluku on 5 ja 6 sellaisia, että toisen nopan silmäluku on 5. Nyt kuitenkin laskimme kahteen kertaan tuloksen, että kummankin nopan silmäluku on 5. On siis $6 + 6 - 1$ tulosta, joissa vähintään toisen nopan silmäluku on 5. Todennäköisyys on siis

$$\frac{6+6-1}{36} = \frac{11}{36}.$$

2. Tarkastellaan kahte peräkkäistä paritonta kokonaislukua. Niistä suurempi on kolme kertaa pienemmän kokoinen. Mikä on näiden lukujen summa?

2. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Lukujen summa on neljä.

Olkoot x ja $3x$ tarkasteltavat luvut. Lisäksi on oltava $x + 2 = 3x$ eli $x = 1$. Summa on siis $1 + 3 = 4$.

3. Etsi sellaiset a, b, että $(x^2 - 3x + 2) \mid (ax^4 + bx^3 + 1)$.

3. tehtävän ratkaisu: Vastaus: On $a = 7/8$ ja $b = -15/8$.

Polynomi $p(x)$ jakaa polynomin $q(x)$ (kompleksilukujen joukossa) täsmälleen silloin, kun kaikki polynomin $p(x)$ nollakohdat ovat myös polynomin $q(x)$ nollakohtia.

Polynomin $x^2 - 3x + 2$ nollakohdat ovat

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}.$$

Halutaan siis, että

$$0 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + 1 = 16a + 8b + 1$$

ja

$$0 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + 1 = a + b + 1.$$

Vähennetään alempi ylemmästä kahdeksalla kerrottuna. Saadaan $8a - 7 = 0$ eli $a = \frac{7}{8}$. Täten

$$b = -a - 1 = -\frac{7}{8} - 1 = -\frac{15}{8}.$$

Halutut luvut a ja b on siis löydetty.

4. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio. Olkoon M nelikulmion sisäpiste. Osoita, että $|AM|+|MB| \leq |AD|+|DC|+|CB|$.

4. tehtävän ratkaisu: Jatketaan janaa AM kunnes se leikkaa jonkun sivuista AD, DC tai CB. Olkoon N leikkauspiste. Koska jana on lyhyin etäisyys kahden pisteen välillä, $|MN| + |NB| \geq |MB|$. Siis

$$|AM| + |MB| \leq |AM| + |MN| + |NB| = |AN| + |NB|.$$

Koska jana on lyhyin etäisyys pisteiden A ja N välillä, ja toisaalta pisteiden myös pisteiden N ja B välillä,

$$|AN| + |BN| \leq |AD| + |DC| + |CB|,$$

ja väite seuraa.

5. Olkoon ABC kolmio, missä kulma BAC on suora kulma, ja kulma BCA on $30°$. Sivulle BC piirretään keskinormaali. Se leikkaa sivun AB jatkeen pisteessä X. Osoita, että kolmio BCX on tasasivuinen.

5. tehtävän ratkaisu: Olkoon M piiretyn keskinormaalin ja janan BC leikkauspiste. Kolmiot BMX ja CMX ovat yhteneviä säännön SKS perusteella. Kulmat BMX ja CMX ovat nimittäin kumpikin $90°$. Siis janat BX ja CX ovat yhtä pitkät, ja kolmio CXB on tasakylkinen kantana CB. Koska kannan vieressä oleva kulma CBX on $60°$, kolmio on tasakylkinen.

6. Kolmen hengen jalkapallossa yksi pelaajista on maalivahti ja kaksi muuta pelaajaa toisiaan vastaan pelaavia kenttäpelaajia. Kun kenttäpelaaja tekee maalin, hän siirtyy maalivahdiksi ja maalivahti siirtyy kenttäpelaajaksi.

Messi, Maradona ja Pele pelasivat jonkun aikaa tätä peliä. Sen jälkeen he kertoivat Gödelille, että Messi oli ollut kenttäpelaajana 10 kierroksella, Maradona 17 kierroksella ja Pele 15 kierroksella. Tällöin Gödel sanoi tietävänsä, kuka kuka teki kuudennen maalin. Kuka se oli?

6. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Maalin tekijä on Messi.

Koska jokaisella kierroksella on kaksi kenttäpelaajaa, kierrosten määrä on $\frac{10+17+15}{2} = 21$. Messi on siis ollut maalivahtina 11 kierroksella. Koska kukaan ei voi olla maalivahtina kahdella peräkkäisellä kierroksella, Messi on ollut maalivahtina kaikilla kierroksilla, joilla on pariton järjestysluku (näitä on yksi enemmän kuin kierroksia, joilla on parillinen järjestysluku). Hän oli siis maalivahtina 7. kierroksella ja teki siis maalin 6. kierroksella.

7. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka toteuttaa ehdon $f(x+y) \geq f(xy)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Osoita, että f on vakiofunktio, eli että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

7. tehtävän ratkaisu: Soveltamalla tehtävänannon ehtoa lukupariin $(x, 0)$ nähdään, että $f(x) \geq f(0)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Soveltamalla tehtävänannon ehtoa lukupariin $(y, -y)$ nähdään, että $f(0) \geq f(-y^2)$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Kun y käy läpi reaaliluvut, $-y^2$ käy läpi negatiiviset reaaliluvut. Siis $f(x) = f(0)$, kun $x \leq 0$.

Soveltamalla tehtävänannon ehtoa lukupariin $(-y, -y)$ nähdään, että $f(-2y) \geq f(y^2)$. Kun $y > 0$ saadaan $f(0) = f(-2y) \geq f(y^2)$. Kun y käy läpi positiiviset reaaliluvut, y^2 käy läpi positiiviset reaaliluvut. Siis $f(0) = f(x)$, kun $x > 0$.

Siis f on vakiofunktio.

8. Osoita, että positiivisilla reaaliluvuilla a, b, c pätee

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Milloin pätee yhtäsuuruus?

8. tehtävän ratkaisu: Laventamalla kaikki nimittäjät abc:ksi ja kertomalla tämä nimittäjä pois saadaan yhtäpitävä yhtälö

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac + 2ab \geq 0$$

mutta tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$(a + b - c)^2 \geq 0,$$

mikä selvästi pätee aina ja yhtäsuuruus pätee, kun $c = a + b$.

9. *Alkuun vähän teoriaa. Luku e on tietty irrationaaliluku, jonka yksidesimaalinen likiarvo on* $2,7$. *Funktio* $\ln$ *määritellään niin, että jos* $e^x = y$, *niin* $\ln y = x$. *Funktio* $\ln x$ *on määritelty aina, kun* $x > 0$.

Funktio $\ln$ *tottelee seuraavia laskusääntöjä:* $\ln xy = (\ln x) + (\ln y)$, $\ln(x^n) = n \ln x$ *ja* $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$.

Ja nyt se tehtävä...

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n > 0$ reaalilukuja. Osoita, että

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n}.$$

9. tehtävän ratkaisu: Logaritmin laskusääntöjen nojalla tehtävänannon epäyhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{(\ln x_1) + \cdots + (\ln x_n)}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Väitteet $x' > y'$ ja $e^{x'} > e^{y'}$ ovat yhtäpitäviä, joten väitteet $\ln x > \ln y$ ja $x > y$ ovat yhtäpitäviä. Siis aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä voidaan ottaa puolittain ln ja saada todistettava väite.

10. Pöydällä on kolme kasaa, joissa kussakin on n pikkukiveä, $n > 0$. Kaksi pelaajaa pelaa seuraavaa peliä: Vuorollaan pelaaja ottaa valitsemastaan kasasta valitsemansa määrän kiviä (kuitenkin vähintään yhden.) Pelin voittaa se, joka tekee siirron, jonka jäljiltä pöydällä ei ole yhtään kiveä.

Osoita, että voittostrategia on pelin aloittajalla.

10. tehtävän ratkaisu: Pelin aloittaja ottaa ensimmäisellä siirrollaan kaikki kivet yhdestä kasasta. Kutsumme kahta muuta kasaa pelikasoiksi.

Tämän jälkeen pelin aloittaja pelaa aina niin, että hänen siirtonsa jälkeen kumpaankin pelikasaan jää yhtä monta kiveä. (Tämä lukumäärä voi olla nolla.) Kun pelin aloittaja pelaa näin, sen toisen pelaajan siirron jälkeen kummassakin pelikasassa on aina eri määrät kiviä (toisessa voi olla nolla), joten tämä toinen pelaaja ei pysty tyhjentämään pöytää kokonaan.

11. Etsi kaikki luvut $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, jolle n on neliö, ja n:n kymmenjärjestelmäesityksen kaikki numerot ovat nelosia.

11. tehtävän ratkaisu: Vastaus: $n = 4$ on ainoa ratkaisu.

Osoitetaan, ettei ole muita. Olkoon $n > 10$ luku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen kaikki numerot ovat nelosia. n voidaan kirjoittaa muodossa $4 \cdot k$, missä k:n kymmenjärjestelmäesityksen kaikki numerot ovat ykkösiä. Jos n on neliö, myös k on neliö. On siis osoitettava, että k ei ole neliö. Nyt $11 \equiv 3 \mod 4$. Koska k saadaan luvusta 11 lisäämällä neljällä jaollinen luku, $k \equiv 3 \mod 4$. Koska kaikki neliöt ovat kongruentteja nollan tai ykkösen kanssa $\mod 4$, luku k ei ole neliö.

12. Kolmion kulmat ovat α, β ja γ. Kolmion sisään piirretyn ympyrän sisään piirretään kolmio kärkinään alkuperäisen kolmion ja ympyrän leikkauspisteet. Määritä näin syntyneen kolmion kulmat.

12. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kulmat ovat $\alpha/2 + \beta/2$, $\beta/2 + \gamma/2$ ja $\alpha/2 + \gamma/2$. Olkoon A, B, C kulmia α, β, γ vastaavat ison kolmion kärjet. Olkoon D sivulla AB oleva pikkukolmion kärki, E sivulla BC oleva pikkukolmion kärki ja F sivulla AC oleva pikkukolmion kärki. Olkoon O ison kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste, joka on myös ympyrän keskipiste.

Määritetään kärkeä D vastaava pikkukolmion kulma. Kulma OAD on $\alpha/2$ ja kulma ODA on suora. Olkoon G janan DF ja kulman BAC puolittajan leikkauspiste. Nyt kulma DGO on suora, joten kolmiot ODA ja OGD ovat yhdenmuotoisia. Siis kulma ODF on $\alpha/2$.

Vastaavalla päättelyllä saadaan $ODE = \beta/2$.

Nyt siis pistettä D vastaava pikkukolmion kulma on $\angle FDO + \angle ODE = \alpha/2 + \beta/2$.

Vastaavasti pistettä E vastaava pikkukolmion kulma on $\beta/2 + \gamma/2$, ja pistettä F vastaava pikkukolmion kulma on $\alpha/2 + \gamma/2$.

Vaikeampia tehtäviä

13. Etsi kaikki parit $n, m \in \mathbb{N}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2.$$

13. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ainoa ratkaisu on $n = 9, m = 4$.

Tehtävänannon lauseke saadaan muokattua muotoon

$$5 \cdot 2^m = (n-1)(n+1).$$

Koska yhtälöllä $5 = (n-1)(n+1)$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, $m \geq 1$. Koska $n-1$ ja $n+1$ ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia, molemmat ovat parillisia. Siis toinen on jaollinen neljällä ja toinen ei ole jaollinen neljällä. Luvuissa $n-1, n+1$ on siis tekijöinä pelkästään kakkosia ja näiden lisäksi yksi viitonen. Siis toisessa ko. luvuista on tekijänä yksi kakkonen ja sen lisäksi mahdollisesti yksi viitonen.

On siis vain neljä kandidaattia: $n-1 = 2, n+1 = 2, n-1 = 10, n+1 = 10$, eli $n = 1, 3, 9, 11$. Laskemalla lauseke $n^2 - 1$ näille havaitaan, että vain $9^2 - 1$ on muotoa $5 \cdot 2^m$, ja tällöin $m = 4$.

14. Olkoon $a \neq b$ reaalilukuja, joille

$$a^4 - 2022a = b^4 - 2022b > 0.$$

Osoita, että $ab < 0$.

14. tehtävän ratkaisu: Muokkaamalla yhtälöä $a^4 - 2022a = b^4 - 2022b$ saadaan

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = 2022.$$

Tästä puolestaan saadaan

$$(a+b)(a^2 + b^2) = 2022.$$

Koska on oltava $a + b > 0$, a ja b eivät molemmat voi olla negatiivisia.

Jos a ja b ovat molemmat positiivia, tehtävänannon epäyhtälöstä saadaan $a, b > \sqrt[3]{2022}$. Tällöin $(a+b)(a^2+b^2) > 2\sqrt[3]{2022}(\sqrt[3]{2022})^2 = 2 \cdot 2022$. Ristiriita.

Siis toinen luvuista a, b on positiivinen ja toinen negatiivinen.

15. Olkoon a, b, c positiivisia kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Mitä kokonaislukuarvoja lauseke

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

voi saada?

15. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Arvot ovat 6, 7 ja 8. Laventamalla kaikki samannimisiksi ja laskemalla yhteen saadaan lauseke

$$\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{abc}.$$

Koska tämä on kokonaisluku, saadaan

$$abc|ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Koska tästä seuraa $a|bc(b+c)$, ja a:lla ja bc:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, $a|b+c$, joten $a|a+b+c$. Vastaavasti $b|a+b+c$ ja $c|a+b+c$. Siis $abc|a+b+c$, ja $a+b+c \geq abc$.

Symmetrian perusteella voidaan olettaa $a \leq b \leq c$. Jos $a \geq 3$, yhtälö $a+b+c \geq abc$ ei selvästikään voi päteä.

Jos $a = 2$, pätee $2bc \leq 2+b+c$. Nyt $b, c \geq 2$, eikä epäyhtälön toteuttavia kokonaislukuratkaisuja ole.

Jos $a = 1$, pätee $bc \leq b+c+1$ ja $bc|b+c+1$. Jos $b \geq 3$, ratkaisuja ei ole. Jos $b = 2$, löytyy ratkaisu $c = 3$. Jos $b = 1$, pätee $c|c+2$, ja ratkaisut $c = 1$ ja $c = 2$.

Nyt siis jäljellä on kandidaatit $(1,1,1)$, $(1,1,2)$ ja $(1,2,3)$.

Näillä saadaan lausekkeen arvot 6, 7 ja 8.

16. Kuinka monella positiivisella kokonaislukuparilla a, b pätee

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2022}?$$

16. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Lukupareja on 27.

Yhtälö saadaan helposti muotoon

$$ab - 2022a - 2022b = 0.$$

Lisäämällä puolittain 2022^2 ja kirjoittamalla vasen puoli tulomuotoon saadaan

$$(a-2022)(b-2022) = 2022^2.$$

Luvuksi $a-2022$ kelpaa siis mikä tahansa luvun 2022^2 tekijä, ja $a-2022$ määrää luvun b yksikäsitteisesti. Alkutekijähajotelma on $2022^2 = 2^2 3^2 337^2$. Tekijöitä, jotka kelpaavat $a-2022$:ksi on siis $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

17. Ympyrän kehälle on merkitty 18 pistettä tasavälein. Osa näistä pisteistä on väritetty. Sanomme, että väritys on hyvä, jos väritettyjen pisteiden joukosta löytyy neljä, jotka ovat suorakulmion kulmapisteet. Mikä on suurin väritettyjen pisteiden määrä, jolla löytyy ei-hyvä väritys?

17. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Suurin väritettyjen pisteiden määrä, jolla löytyy ei-hyvä väritys on 10.

Kymmenen peräkkäistä väritettyä pistettä on ei-hyvä väritys. Värityksen päätepisteet ovat tällöin ympyrän halkaisijalla, eikä suorakulmiota löydy.

Osoitetaan, että yhdentoista pisteen väritys on väistämättä hyvä. Jos löytyy kaksi eri ympyrän halkaisijaa, joiden päätepisteet on väritetty, nämä päätepisteet kelpaavat suorakulmion kulmapisteiksi. Osoitetaan, että tämä on tilanne. Värittämättömiä pisteitä on seitsemän, joten on korkeintaan seitsemän sellaista ympyrän halkaisijaa, joiden toinen päätepiste on väritetty ja toinen värittämätön. On siis vähintään neljä väritettyä pistettä, jotka ovat sellaisten halkaisijoiden päätepisteitä, joiden kumpikin päätepiste on väritetty. Kyseisiä halkaisijoita on siis vähintään kaksi.

18. Olkoon A, B, C kolme pistettä ympyrän kehällä, ja olkoon M kyseisen ympyrän keskipiste. Olkoon M' pisteen M peilaus janan AB suhteen. Oletamme, että pisteet A, B, C on valittu niin, että M' on kolmion ABC sisällä, ja lisäksi M' on kulmien CAB ja CBA puolittajien leikkauspiste. Jana AM leikkaa uudestaan ympyrää pisteessä D.

Osoita, että $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

18. tehtävän ratkaisu: Koska $|AM| = |BM|$, ja kolmiot AMB ja $AM'B$ ovat yhteneviä, $|AM'| = |BM'|$, ja kulmat $M'AB$ ja $M'BA$ ovat yhtäsuuria. Näin ollen kulmat CAB ja CBA ovat yhtäsuuria, joten $|CA| = |CB|$.

Kehäkulmalauseen nojalla kulmat ADC ja ABC ovat yhtäsuuria, joten kulmat MDC ja ABC ovat yhtäsuuria. Koska $|MD| = |MC|$, kolmiot ACB ja DMC ovat yhdenmuotoisia.

Siis $\frac{|CA|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|DC|} = \frac{|AM|}{|CD|}$, mistä väite seuraa.

19. Olkoon AB jana, ja piirretään ympyrä ω jana AB halkaisijana. Olkoon O ympyrän keskipiste ja OC ympyrän säde, joka on kohtisuorassa janaa AB vastaan. Olkoon M sisäpiste janalla OC.

Olkoon N ympyrän ω ja N janan AM jatkeen leikkauspiste (joka siis on se muu leikkauspiste kuin A). Piirretään ympyrälle ω tangentit pisteisiin N ja B. Olkoon P näiden tangenttien leikkauspiste.

Osoita, että voidaan piirtää ympyrä, jonka kehällä sijaitsevat pisteet M, O, P, N

19. tehtävän ratkaisu: Kulmat ONP ja OBP ovat 90 astetta, ja janat ON ja OB ovat yhtä pitkät. Siis kolmiot ONP ja OBP ovat yhtenevät.

Olkoon $\alpha = \angle NAB$. Nyt $\angle NOB = 2\alpha$, ja $\angle POB = \alpha$. Kolmiot POB ja MAO ovat siis yhtenevät, ja OM ja PB ovat yhtä pitkät. Siis $MOPB$ on suorakulmio.

Nyt kulmat OMP ja ONP ovat suoria kulmia. Siis M ja N sijaitsevat sellaisen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on OP.

20. Olkoon V suuntaamaton verkko, jossa on 2019 solmua. Verkon kääntö solmussa v tarkoittaa verkon muuttamista niin, että kaikille muille solmuille v' verkosta poistetaan kaari (v, v'), jos tällainen kaari ennen kääntöä oli, ja verkkoon lisätään kaari (v, v'), jos tällaista kaarta ei ennen kääntöä ollut.

Verkkoa kutsutaan minimoiduksi, jos sen kaarien lukumäärää ei enää saa pienennettyä jonolla kääntöjä. (Jonossa samaa solmua saa kääntää useaan kertaan.)

Mikä on suurin mahdollinen kaarien määrä minimoidulle 2019 solmun verkolle?

20. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Tehtävässä kysytty lukumäärä on 1009^2.

Oletetaan, että V koostuu kahdesta klikistä, joista ei ole kaaria toisiinsa. Silloin verkon kääntö solmussa v tarkoittaa vain solmun v siirtämistä klikistä toiseen, joten verkko säilyy kahdesta klikistä koostuvana verkkona, jossa klikkien välillä ei ole kaaria.

Tällaisessa kahdesta klikistä koostuvassa verkossa kaaria on

$$(x(x-1) + (2019 - x)(2019 - x - 1))/2,$$

missä x on toisen klikin koko.

Lauseke saadaan muokattua muotoon

$$(2019^2 - 2019 + 2x(x - 2019))/2$$

Sen minimi on kohdassa $(0 + 2019)/2 = 1009\frac{1}{2}$.

Koska lauseke on kasvava minimikohtaa suuremmilla x:n arvoilla ja vähenevä pienemmillä arvoilla, pienin määrä kaaria kahdesta klikistä koostuvalle verkolle saavutetaan, kun klikkien koot ovat 1010 ja 1009 solmua. Tällöin kaaria on $(1010 \times 1009 + 1009 \times 1008)/2 = 1009^2$. Tämä luku on siis erään minimoidun verkon kaarien määrä.

Osoitetaan sitten, että mielivaltaisella verkolla päästään korkeintaan 1009^2 kaareen.

Olkoon G minimoitu verkko. Jos jostain solmusta lähtee enemmän kuin 1009 kaarta, saadaan pienempi verkko kääntämällä tässä solmussa. Siis G:ssä jokaisesta solmusta lähtee korkeintaan 1009 kaarta.

Olkoon G edelleen minimoitu verkko. Väitämme, että solmuja, joista lähtee 1009 kaarta on korkeintaan 1010. Tehdään vastaoletus, että niitä on enemmän. Olkoon v solmu, josta lähtee 1009 kaarta. Nyt on olemassa solmu v', johon ei mene kaarta v:stä, ja josta lähtee 1009 kaarta. Käännetään verkkoa v:ssä. Tässä operaatiossa verkon kaarien kokonaismäärä säilyy samana, ja yksi uusista kaarista kulkee v:stä v':uun. Siis v':sta lähtee 1010 kaarta. Nyt kääntämällä v':ssa saadaan verkon kaarien määrä pienenemään, mikä on ristiriita.

Siis G:ssä on korkeintaan $(1010 \times 1009 + 1009 \times 1008)/2 = 1009^2$ kaarta.

21. Yksikköneliö jaetaan suorakulmioihin, joiden sivut ovat yksikköneliön sivujen suuntaisia. Osa suorakulmioista väritetään punaisiksi ja loput valkoisiksi, kuitenkin niin, että punaisten suorakulmioiden pinta-alojen summa on sama kuin valkoisten suorakulmioiden pinta-alojen summa.

Jokaisen punaisen suorakulmion sisään kirjoitetaan sen korkeuden ja leveyden osamäärä. Jokaisen valkoisen suorakulmion sisään kirjoitetaan sen leveyden ja korkeuden osamäärä.

Osoita, että pienin mahdollinen arvo edellämainittujen osamäärien summalle on $2\frac{1}{2}$.

21. tehtävän ratkaisu: Merkitään a_i:lla jokaisen valkoisen suorakulmion i leveyttä ja b_i:llä sen korkeutta. Merkitään vastaavasti c_i:llä jokaisen punaisen suorakulmion i leveyttä ja d_i:llä sen korkeutta.

Lemma Joko $\sum a_i \geq 1$ tai $\sum d_i \geq 1$.

Jos yksikköneliön läpi voidaan vetää vaakasuora suora, joka leikkaa vain valkoisia suorakulmioita, ensimmäinen vaihtoehto pätee. Muussa tapauksessa jokainen vaakasuora suora leikkaa punaisia suorakulmioita, ja jälkimäinen vaihtoehto pätee. Lemman todistus valmis.

Nyt symmetrian perusteella voidaan olettaa $\sum a_i \geq 1$. Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä saadaan

$$(\sum \frac{a_i}{b_i})(\sum a_i b_i) \geq (\sum a_i)^2 \geq 1.$$

Mutta $\sum a_i b_i = 1/2$, joten $\sum \frac{a_i}{b_i} \geq 2$.

Koska jokainen $c_i \leq 1$, saadaan

$$\sum \frac{d_i}{c_i} \geq \sum c_i d_i = 1/2.$$

Niinpä tehtävässä kysytty arvo on vähintään $2\frac{1}{2}$. Tämä pienin arvo saadaan jakamalla yksikköneliö vaakasuoralla suoralla kahteen samankokoiseen suorakulmioon, joista toinen väritetään punaiseksi ja toinen valkoiseksi.