Kesän valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 11.9.2022 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Helpompia tehtäviä

1. Crawford on pelaamassa backgammonia. Hänellä on nappula seitsemän askeleen päässä vastustajan nappulasta sekä toinen nappula viiden askeleen päässä vastustajan nappulasta. Crawford heittää kahta noppaa ja saa syötyä vastustajan nappulan, jos noppien silmälukujen summa on 5 tai 7, tai jos jommastakummasta nopasta tulee viitonen.

Millä todennäköisyydellä Crawford saa syötyä vastustajan nappulan?

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{19}{36}$.

(Ratkaisua lukiessa nopat kannattaa ajatella eri värisiksi niin, että esimerkiksi *sinisestä nopasta kakkonen ja punaisesta kolmonen* on eri tulos kuin *sinisestä nopasta kolmonen ja punaisesta kakkonen.*)

On yhteensä 36 mahdollista tulosta, jotka kahdesta nopasta voi saada.

Summan 7 saa 6 eri tavalla $1-6$, $2-5$, $3-4$, $4-3$, $5-2$ ja $6-1$. Summan 5 saa 4 eri tavalla $1-4$, $2-3$, $3-2$, $4-1$.

On 6 tapaa saada ensimmäisestä nopasta viitonen ($5-1$, $5-2$, $5-3$, $5-4$, $5-5$ ja $5-6$) ja 6 tapaa saada toisesta nopasta viitonen. Nyt kuitenkin laskimme tapauksen $5-5$ kahdesti, joten on 11 tapaa saada jommastakummasta nopasta viitonen.

On kaksi tapaa saada jommastakummasta nopasta viitonen ja yhtaikaa summaksi seitsemän. Näin ollen noppatuloksia, joilla nappulan saa syötyä on $6+4+11-2=19$. Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{19}{36}$

2. Culbertson on pelaamassa bridgeä. Hänen oikeanpuoleisella vastustajallaan on 13 tavallisesta pakasta jaettua pelikorttia, samoin hänen vasemmanpuoleisella vastustajallaan. Culbertson tietää, että näiden korttien joukossa on patajätkä ja patarouva. Culbertson voittaa jaon, jos on käynyt niin onnekkaasti, että nämä ovat samalla pelaajalla. Millä todennäköisyydellä Culbertson voittaa?

2. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{12}{25}$.

Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että patajätkä on vasemmanpuoleisella vastustajalla. Tällä on siis 12 muuta korttia. Patajätkää lukuunottamatta vasemman- ja oikeanpuoleisilla vastustajilla on yhteensä 25 korttia. Todennköisyys, että patarouva on vasemmanpuoleisella vastustajalla on siis $\frac{12}{25}$.

3. Määritellään positiivisille kokonaisluvuille a, b laskutoimitukset $\circ_n$. Ensinnäkin $a \circ_1 b = a + b$ ja induktiivisesti

$$a \circ_{n+1} b = a \circ_n (a \circ_n (a \circ_n (\cdots \circ_n a))),$$

missä a:ita on oikealla puolen b kappaletta. Siis esimerkiksi $a \circ_2 b = ab$ ja $a \circ_3 b = a^b$.

Osoita, että $2 \circ_n 2 = 4$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

3. tehtävän ratkaisu:

Selvästi $2 \circ_1 2 = 2 + 2 = 4$.

Tehdään induktio-oletus $2 \circ_n 2 = 4$. Nyt $2 \circ_{n+1} 2 = 2 \circ_n 2$, koska oikealla puolen kakkosia pitää ottaa 2 kappaletta. Siis $2 \circ_{n+1} 2 = 4$ induktio-oletuksen perusteella. Induktio valmis.

4. Kansanedustajien palkka päätettiin määrätä kansanäänestyksellä. Jokainen äänestäjä kirjoittaa äänestyslappuun luonnollisen luvun. Kaikkien näiden lukujen keskiarvo (pyöristettynä lähimpään kokonaislukuun) on se euromäärä, jonka kukin kansanedustaja saa kuussa.

Äänestäjiä on alle 5 miljoonaa, ja myös kansanedustajat itse saavat äänestää. Osoita, että kansanedustaja Luihunen voi omalla äänestyskäyttäytymisellään varmistaa, että hän saa vähintään miljoona euroa kuussa.

4. tehtävän ratkaisu:

Olkoon x Luihusen kirjoittama luku ja y muiden äänestäjien kirjoittamien lukujen summa. Olkoon $k < 5.000.000$ kaikkien äänestäjien määrä.

Palkaksi saadaan

$$\frac{x+y}{k} > \frac{x}{5.000.000}.$$

Nyt Luihunen voi kirjoittaa x:ksi luvun 5.000.000.000.000, jolloin

$$\frac{x}{5.000.000} = 1.000.000.$$

5. Pelikorttipakassa on numeroidut kortit 1-100, yksi kortti kutakin numeroa. Pelaaja pelaa yksinpeliä, jossa hän ensin jakaa kaksi korttia. Olkoon pienempi kortti a ja suurempi b. Sitten hän jakaa yhden kortin c. Pelaaja voittaa, jos kortti c on arvoltaan korttien a ja b välissä.

Millä todennäköisyydellä pelaaja voittaa pelin?

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

Olkoon x, y, z kolme eri korttia. Kortit x, y, z voivat tulla pakasta kahdessa voittavassa järjestyksessä pienin-isoin-keskimmäinen ja isoin-pienin-keskimmäinen. Toisaalta x, y, z voivat tulla pakasta yhteensä $3 \times 2 \times 1 = 6$ eri järjestyksessä. Olkoon k kaikken (järjestämättömien) kolmen kortin joukkojen lukumäärä, jotka pakasta voi saada. Nyt voittotodennäköisyys on

$$\frac{2k}{6k} = \frac{1}{3}$$

.

6. Tavallisten laskusääntöjen mukaan alla oleva potenssi lasketaan seuraavasti:

$$2^{2^{2^2}} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = 65536.$$

Mikäli potenssien korotukset tehtäisiinkin eri järjesteyksessä, esimerkiksi laskettaisiin $\left(2^2\right)^{2^2} = 256$, niin kuinka monta erilaista mahdollista lopputulosta laskulle on?

6. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Erilaisia lopputuloksia on kaksi.

Käydään yksinkertaisesti eri vaihtoehdot läpi. Tutkitaan ensin tapausta, jossa luku 2 korotetaan johonkin potenssiin, joka rippuu kolmesta viimeisestä kakkosesta. Jos toinen kakkonen korotetaan potenssiin 2^2, niin saadaan tehtävänannossa annettu lauseke ja tulos 65536. Ainoa mahdollinen toinen vaihtoehto on, että lasketaan $(2^2)^2 = 16$ eli saadaan koko laskuksi $2^{16} = 65536$ eli sama tulos kuin edellä. On siis tarkasteltu kaikki ne tapaukset, joissa ensimmäinenluku 2 korotetaan jonkin potenssiin, joka saadaan kolmesta muusta luvusta 2.

Tutkitaan nyt sellaisia vaihtoehtoja, joissa ensimmäinen luku 2 on ensin korotettu johonkin potenssiin ja sitten tätä lukua korotetaan johinkin potenssiin. Käydään nämä tapaukset läpi samalla idealla kuin edellä:

$$\left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 256, \quad \left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 256, \quad \left(2^{\left(2^2\right)}\right)^2 = 256.$$

On siis saatu yhteensä kaksi eri vaihtoehtoa vastaukseksi.

7. Tutkitaan jonoa

$$1 * 2 * 3 * \cdots * 2022.$$

Jonossa jokainen $*$ saadaan korvata joko $+$(plus)-merkillä tai $-$(miinus)-merkillä. Mikä on pienin positiivinen arvo, joka lausekkeelle on näin mahdollista saada?

7. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin positiivinen arvo on 1.

Jono voidaan kirjoittaa sopivilla $+$- ja $-$-valinnoilla

$$(1-2)+(4-3)+(5-6)+(8-7)+\cdots+(2020-2019)+(2022-2021).$$

Koska 2020 on neljällä jaollinen, viimeistä termiä $(2022-2021)$ lukuunottamatta summa on 0. Koska $2022 - 2021 = 1$, jono saa arvon 1.

8. Äärettömän pieni kirppu loikkii loputtomasti yksikköympyrän kehällä. Se aloittaa jostain yksikköympyrän pisteestä ja loikkii vastapäivään. Jokaisella loikalla se ylittää kaaren pituuden $2\pi x$, missä $0 < x \leq 1/2$ on reaaliluku. (Kaikki loikat ovat siis yhtää pitkiä.) Millä x:n arvoilla kirppu käy vähintään kahdesti samassa pisteessä?

8. tehtävän ratkaisu:

Vastaus: Kirppu käy vähintään kahdesti samassa pisteessä jos ja vain jos x on rationaaliluku.

Kirppu käy kahdesti samassa pisteessä jos ja vain jos on olemassa luonnolliset luvut k, k', n, $k \neq k'$, joille

$$2\pi kx = 2\pi k'x + 2\pi n.$$

Tästä saadaan

$$kx = k'x + n.$$

Ratkaisemalla x saadaan $x = \frac{n}{k-k'}$. Tästä nähdään, että x:n on oltava rationaaliluku. Toisaalta valitsemalla k, k' ja n sopivasti x:ksi saadaan mikä tahansa rationaaliluku.

9. Olkoon n luonnollinen luku ja k luonnollinen luku, joka on jaollinen kahdella muttei neljällä. Osoita, että on mahdotonta, että sekä n että $n+k$ ovat neliölukuja.

9. tehtävän ratkaisu:

Tehdään vastaoletus, että molemmat ovat neliölukuja. Kirjoitetaan $n = x^2$ ja $n + k = (x+a)^2$. Nyt $k = (x+a)^2 - x^2 = 2xa + a^2 = a(2x+a)$. Jos a on parillinen, on k jaollinen neljällä, ristiriita. Jos taas a on pariton, on k pariton, ristiriita.

10. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = \frac{1}{8}$. Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

10. tehtävän ratkaisu: Aritmeettis-geometrisellä epäyhtälöllä saadaan

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4}$$

ja

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = \frac{3}{16}.$$

Tehtävänannon väite saadaan laskemalla nämä epäyhtälöt yhteen.

Vaikeampia tehtäviä

11. Peräkkäisistä luonnollisista luvuista muodostetaan äärellinen jono. Vain jonon ensimmäisen ja viimeisen luvun numeroiden summat ovat jaollisia kahdeksalla.

Kuinka pitkä jono voi pisimmillään olla?

11. tehtävän ratkaisu: Kutsutaan jonon muita lukuja kuin ensimmäistä ja viimeistä jonon sisäluvuiksi.

Olkoon j jono, joka sisältää vähintään 17 lukua. Jos jonon ensimmäisen jäsenen ykkösiä osoittava numero on 0 tai 1, jono sisältää sisälukuinaan kaikki luvut kaikki luvut $10k+2, 10k+3, \ldots, 10k+9$ jollekin k, ja vähintään yhden näistä numeroiden summa on kahdeksalla jaollinen.

Jos ensimmäisen luvun ykkösiä osoittava numero on vähintään 2, jono sisältää sisälukuinaan kaikki luvut $10k+0, 10k+1, \ldots, 10k+7$ jollekin k, ja yhden näistä on numeroiden summa kahdeksalla jaollinen.

Pisin mahdollinen jono on siis korkeintaan 16 lukua pitkä.

16 lukuun päästään jonolla, jonka ensimmäinen numero on 9999992.

12. Olkoon A säännöllinen n-kulmio tasossa aseteltuna niin, että se on symmetrinen y-akselin suhteen. Sanomme, että kuvion A kierto tai peilaus on kuvion A symmetria, jos se vie A:n itselleen. Olkoon k kuvion A kierto $360/n$ astetta vastapäivään ja p kuvion A peilaus y-akselin suhteen.

Osoita, että jokainen A:n symmetria voidaan esittää jonona k:ita ja p:itä.

12. tehtävän ratkaisu:

Olkoon $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ kuvion A kärjet lueteltuna jostain kärjestä alkaen vastapäivään ja $s\colon A \to A$ symmetria. Nyt $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat peräkkäisiä A:n kärkiä joko myötä- tai vastapäivään lueteltuna. Huomataan myös, että $p(a_0), p(a_1), \ldots, p(a_{n-1})$ ovat peräkkäiset kärjet myötäpäivään lueteltua.

Jos $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat peräkkäisiä kärkiä lueteltuna vastapäivään, valitaan i siten, että $s(a_0) = a_i$. Nyt $s(a_0)$ on i kärkeä vastapäivään a_0:sta, ja s saadaan toistamalla k:ta i kertaa.

Jos taas $s(a_0), s(a_1), \ldots, s(a_{n-1})$ ovat kärkiä lueteltuna myötäpäivään, valitaan i niin, että $s(a_i) = p(a_0)$. Nyt $s(a_0)$ on i kärkeä vastapäivään $s(a_i) = p(a_0)$:sta, ja s saadaan ottamalla ensin yksi p, ja sen jälkeen i kpl k:ta.

13. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on vähintään 4 positiivista jakajaa, ja joille

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

kun $d_1, \ldots, d_4$ ovat luvun n neljä pienintä positiivista jakajaa.

13. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ainoa ratkaisu on $n = 130$.

Olkoon $n, d_1, \ldots, d_4$ kuten tehtävänannossa. Jos n on pariton, se on neljän parittoman luvun summa, mikä on mahdotonta.

Siis n on parillinen, $d_1 = 1$ ja $d_2 = 2$. Lisäksi toinen luvuista d_3, d_4 on parillinen ja toinen pariton.

Jos d_3 on parillinen, $d_3 = 4$ ja $d_4 > 4$. Mutta nyt $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1 + 4 + 16 + d_4^2 = 21 + d_4^2$, mikä on $2 \mod 4$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että n on jaollinen neljällä.

Siis d_3 on pariton ja $d_4 = 2d_3$ tai $d_3 = 3, d_4 = 4$. Jälkimmäisessä tapauksessa $n = 30$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että n on jaollinen neljällä.

Siis d_3 on pariton alkuluku ja $d_4 = 2d_3$. Siis $n = 1 + 4 + c_3^2 + 4c_3^2 = 5(c_3^2 + 1)$. Siis $5|n$. Jos $c_3 = 5$, saadaan toimiva ratkaisu $n = 130$.

Jos taas $d_3 = 3, d_4 = 6$, saadaan $n = 50$, mikä ei ole jaollinen kolmella, ristiriita

14. Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ sekä $y_1, \ldots, y_n$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots, x_n)^2}{y_1 + \cdots + y_n}.$$

14. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan jonot $\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}$ ja $\sqrt{y_1}, \ldots, \sqrt{y_n}$. Sovelletaan näihin jonoihin Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä ja saadaan

$$(\frac{x_1^2}{y_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n})(y_1 + \cdots + y_n) \geq (x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

Väite saadaan ylläolevasta epäyhtälöstä jakamalla puolittain luvulla $y_1 + \cdots + y_n$.

15. Olkoon a, b, c kolmion sivujen pituudet ja S sen pinta-ala. Osoita, että

$$S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

15. tehtävän ratkaisu:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2 \geq 0.$$

Siis $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$, ja riittää todistaa

$$S \leq \frac{ab+bc+ac}{6}.$$

Nyt $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, missä α on sivujen a ja b välinen kulma. Siis $2S \leq ab$. Vastaavasti $2S \leq bc$ ja $2S \leq ac$. Siis

$$\frac{ab+bc+ac}{6} \geq \frac{2S+2S+2S}{6} = S.$$

16. On kaksi sallittua operaatiota: Luvun kertominen kahdella ($\times 2$) sekä kolmen vähentäminen luvusta (-3). Muodostetaan jono sallittuja operaatioita, joilla luvusta 11 päästään lukuun 25. Mikä on pienin mahdollinen pituus tälle jonolle?

16. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin pituus on 7 operaatiota.

Vaadittu jono on $-3, -3, \times 2, -3, \times 2, \times 2, -3$.

Todistetaan sitten, että vähintään 7 operaatiota vaaditaan. Tehdään vastaoletus, että korkeintaan 6 operaatiolla onnistuu. Koska $\times 2$ on ainoa operaatio, joka suurentaa lukua, tarvitaan vähintään kaksi $\times 2$-operaatiota, että luvusta 11 päästään lukuun, joka on vähintään 25. Koska $25 \equiv 1 \mod 3$ ja $11 \equiv 2 \mod 3$, eikä -3 muuta tätä kongruenssia, $\times 2$ -operaatioita tarvitaan pariton määrä, siis 3 tai 5.

Jos $\times 2$-operaatiota tehdään 5 ja halutaan päästä alle 7 operaation, jää vain yksi -3-operaatio. Koska 25 on pariton, operaatiojonon viimeinen operaatio on -3. Mutta yksinkertainen lasku osoittaa, että operaatiojonolla $\times 2, \times 2, \times 2, \times 2, \times 2, -3$ ei päästä luvusta 11 lukuun 25.

Siis $\times 2$-operaatioita on kolme, ja operaatiojonon viimeinen operaatio on -3. Jotta tehtävä voitaisiin ratkaista korkeintaan kuudella operaatiolla, pitäisi siis kolmella $\times 2$ ja korkeintaan kahdella -3 -operaatiolla päästä luvusta 11 lukuun 28.

Operaatiojonossa on seuraava kommutaatiosääntö: $-n, \times 2 = \times 2, -2n$. Näin ollen -3-operaatiot voidaan siirtää jonon loppuun -3, -6, -12 ja -24-operaatioiksi. Näillä pitäisi päästä luvusta $11 \cdot 2^3 = 88$ lukuun 28. Mutta $88 - 28 = 60 > 2 \cdot 24$, eli ei onnistu.

17. Suositun mätkintävideopelin maailmanmestaruusturnauksessa oli 1000 osanottajaa. He pelasivat keskenään joukon pelejä; yhteen peliin osallistui aina kaksi osanottajaa, eikä mikään pari pelannut keskenään enempää kuin yhden pelin.

Turnauksen jälkeen todettiin, että jokaisesta sellaisesta parista, joka oli pelannut keskenään pelin löytyi pelaaja, joka oli pelannut korkeintaan 20 peliä.

Osoita, että turnauksessa pelattiin yhteensä korkeintaan $980 \cdot 20$ peliä.

17. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan verkko G, jonka solmuja ovat pelaajat, ja pelaajien välillä on kaari, jos he ovat pelanneet keskenään pelin. Olkoon A niiden pelaajien joukko, jotka ovat pelanneet yli 20 peliä ja B niiden pelaajien joukko, jotka ovat pelanneet korkeintaan 20 peliä.

Oletetaan, että A:n koko on yli 20 solmua. Koska A:n sisällä ei kulje kaaria, ja jokaisesta B:n solmusta voi lähteä korkeintaan 20 kaarta, kaaria on yhteensä korkeintaan

$$20|B| < 20 \cdot 980.$$

Oletetaan sitten, että A:n koko on korkeintaan 20 solmua. Muokataan G:tä niin, että jos $b \in B$, ja b:stä lähtee kaari toiseen B:n alkioon b', mutta on olemassa $a \in A$, jolle b:stä ei mene kaarta a:han, poistetaan verkosta kaari (b, b') ja lisätään kaari (b, a). Tämä ei vähennä kaarien määrää; toistetaan tätä niin pitkään kuin mahdollista. Muokkausten jälkeen jokaisesta $b \in B$ lähtee korkeintaan $20 - |A|$ kaarta muihin B:n alkioihin.

Nyt verkon kaarien määrä on korkeintaan

$$|A|(1000-|A|) + \frac{(20-|A|)(1000-|A|)}{2} = \frac{(20+|A|)(1000-|A|}{2} \leq \frac{40 \cdot 980}{2} = 20 \cdot 980.$$

18. Ratkaise yhtälö

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3,$$

kun a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

18. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ainoa ratkaisu on $a = b = c = 2$.

Oletetaan $a, b \geq 3$, jolloin $6|a!$, $6|b!$. Koska $2^6 \equiv 1 \mod 9$, pätee $2^{a!} \equiv 1 \mod 9$, $2^{b!} \equiv 1 \mod 9$, ja tehtävänannon yhtälön vasen puoli on kongruentti $2 \mod 9$. Käymällä vaihtoehdot läpi todetaan, ettei yksikään kuutio ole kongruentti $2 \mod 9$, joten yhtälöllä ei ole tässä tapauksessa ratkaisuja.

Siis a tai b kuuluu joukkoon $\{1, 2\}$. Oletetaan, että $a \leq 2$ ja $b \geq 3$ Jos $a = 1$, yhtälön vasen puoli on kongruentti $3 \mod 9$, eikä mikään kuutio ole $3 \mod 9$. Jos taas $a = 2$, yhtälön vasen puoli on $5 \mod 9$, eikä mikään kuutio ole $5 \mod 9$. Tapaus $b \leq 2$, $a \geq 3$ on symmetrinen.

Jos taas $a, b \leq 2$, käymällä vaihtoehdot läpi todetaan, että ainoa ratkaisu on $a = b = c = 2$.

19. Sanomme että äärellinen jono L luonnollisia lukuja on hyvä, jos sen suurin jäsen esiintyy jonossa vain yhden kerran. Sanomme, että jono L' on jonon L alijono, jos L' muodostuu jonon L peräkkäisistä jäsenistä. Siis esimerkiksi 376 on jonon 93761 alijono. Sanomme, että L on superhyvä, jos sen jokainen alijono on hyvä.

Superhyvä jono, jonka pituus on 2000 jäsentä, yritetään tehdä käyttäen niin pieni määrä eri lukuja kuin mahdollista. Mikä on pienin määrä eri lukuja, joilla homma onnistuu?

19. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin määrä on 11.

Jos $n = k2^i$, missä k on pariton, merkitään $\nu_2(n) = i$. Nyt jono L on

$$\nu_2(1), \nu_2(2), \nu_2(3), \ldots, \nu_2(2000).$$

Koska $2^{10} = 1024$, jonossa tosiaan esiintyy täsmälleen 11 eri lukua. Olkoon L' jonon L alijono, jonon L indeksistä a indeksiin b. Oletetaan, että $a \leq k2^n \leq b$, $a \leq k'2^n \leq b$, missä $k > k'$ parittomia. Nyt $k2^n - k'2^n = (k - k')2^n \geq 2^{n+1}$, joten on olemasssa k'', jolle $a \leq k''2^{n+1} \leq b$. Siis L' on hyvä, ja L superhyvä.

Osoitetaan sitten, että 10 eri lukua ei riitä. Tehdään vastaoletus, että L on vaadittu jono 10 eri luvulla. Jokaiseen $1 \leq i \leq 2000$ liitetään joukko P_i, joka sisältää ne luvut, joita on L:n i ensimmäisen jäsenen joukossa pariton määrä kertoja. Koska mahdollisia joukkoja P_i on $2^{10} = 1024$ kappaletta, on kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla olemassa $i, i', i < i'$, joille $P_i = P_{i'}$. Mutta nyt alijono indeksistä i indeksiin i' sisältää parillisen määrän kaikkia jäseniään, joten tämä alijono ei voi olla hyvä, eikä L superhyvä.