Syyskuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 23.10.2022 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon a, b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^2 + b^2 \geq \frac{3}{2}ab.$$

1. tehtävän ratkaisu: Epäyhtälö voidaan muokata yhtäpitävään muotoon

$$a^2 - \frac{3}{2}ab + b^2 \geq 0.$$

Toisaalta tämä epäyhtälö on tosi, koska

$$a^2 - \frac{3}{2}ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0.$$

2. Iso kuutio koostuu $3 \times 3 \times 3$ läpinäkymättömästä pikkukuutiosta. Isosta kuutiosta poistetaan pikkukuutioita niin, että seuraava pätee jokaiselle ison kuution tahkolle: Kun tahkon keskimmäistä pikkuneliötä katsotaan, siitä näkyy ison kuution läpi. Pikkukuutioita poistetaan pienin mahdollinen määrä, jolla edellämainittu onnistuu.

Kuinka monta pikkukuutiota isoon kuutioon jää?

2. tehtävän ratkaisu:

Poistettavia pikkukuutioita ovat tahkojen keskikuutiot ja koko ison kuution keskikuutio. Koska kuutiossa on 6 tahkoa, poistettavia pikkukuutioita on 7.

Jäljelle siis jää $3 \cdot 3 \cdot 3 - 7 = 27 - 7 = 20$ pikkukuutiota.

3. Olkoon $x_1, \ldots, x_8$ kokonaislukuja, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_i = 0$ muuten. On kolme sallittua operaatiota kaikilla kokonaisluvuilla k:

- Lukuun x_1 lisätään $2k$, luvusta x_2 vähennetään k ja luvusta x_8 vähennetään k.
- Lukuun x_8 lisätään $2k$, luvusta x_7 vähennetään k ja luvusta x_1 vähennetään k.
- Lukuun x_i, $1 < i < 8$, lisätään $2k$, luvusta x_{i-1} vähennetään k ja luvusta x_{i+1} vähennetään k.

Osoita, että millään jonolla sallittuja operaatioita ei päästä tilanteeseen, missä $x_i = 0$ kaikilla i.

3. tehtävän ratkaisu: Olkoon p_2 parillisindeksisten x_i:den summa ja p_1 paritonindeksisten x_i:den summa. Missään operaatiossa p_1 tai p_2 ei vaihdu parittomasta parilliseksi. Koska nämä luvut ovat alussa parittomia ja halutussa lopputilanteessa parillisia, haluttuun lopputilanteeseen ei päästä.

4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että välillä $0, \ldots, n-1$ on vähintään $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ lukua k, joille yhtälöllä $x^2 \equiv k \mod n$ ei ole ratkaisua.

$\lceil y \rceil$ on pienin kokonaisluku, joka on vähintään y.

4. tehtävän ratkaisu: Huomataan, että välillä $0, \ldots, n-1$ on vähintään $\frac{n-2}{2}$ paria $\{a, n-a\}$, joille $a \neq n-a$. (Nolla ei koskaan paridu, ja jos n on parillinen, $n/2$ ei paridu. Muut luvut ovat pareissa.) Kyseisille pareille kuitenkin $a^2 \equiv (-a)^2 \equiv (n-a)^2 \mod n$.

Olkoon $f\colon \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$, jolle $f(x) \equiv x^2 \mod n$. Koska f:n lähtöjoukossa on yhtä monta alkiota kuin maalijoukossa, ja vähintään $\frac{n-2}{2}$ parissa lähtöjoukon pisteitä saadaan kussakin sama arvo, myös vähintään $\frac{n-2}{2}$ arvoa jää saamatta.

Koska saamatta jäävien arvojen määrä on kokonaisluku, myös $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ arvoa jää saamatta.

5. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor$$

luonnollisten lukujen joukossa? $\lfloor y \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on korkeintaan y.

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Yhtälöllä on neljä ratkaisua.

Jos $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} \geq 1$, luku x ei voi olla ratkaisu, Toisaalta aina, kun $x \geq 7\frac{1}{2}$, epäyhtälö $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} \geq 1$ pätee. Kokeilemalla x:n paikalle luvut $0, \ldots, 7$ havaitaan, että ratkaisut ovat $0, 1, 2, 5$.

6. Jasminilla on kaksi laatikkoa, laatikko A ja laatikko B. Laatikossa A on 20 simpukankuorta, ja laatikko B on tyhjä. Jasmin pelaa peliä, missä on kaksi erilaista sallittua askelta.

1. Jasmin voi siirtää yhden simpukankuoren laatikosta A laatikkoon B.

2. Jasmin voi poistaa laatikosta A simpukankuoria k kappaletta, missä k on laatikon B simpukankuorien lukumäärä (tai kaikki simpukankuoret laatikosta A, jos siinä on alle k simpukankuorta.)

Jasmin yrittää tyhjentää laatikon A niin pienellä määrällä sallittuja askeleita kuin mahdollista. Mikä on pienin määrä sallittuja askeleita, jolla homma onnistuu?

6. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin askeleiden lukumäärä on 8.

Jos Jasmin tekee ensin neljä tyypin (1) askelta ja sitten neljä tyypin (2) askelta, hän saa laatikon A tyhjennettyä.

Osoitetaan sitten, että tyhjentäminen ei onnistu seitsemällä askeleella. Olkoon J jono sallittuja askeleita, jossa on jossain vaiheessa tyypin (1) askel heti tyypin (2) askeleen perässä. Vaihtamalla näiden askeleiden järjestyksen keskenään laatikosta A poistettujen simpukankuorien määrä ei ainakaan vähene. Näin ollen riittää tutkia sellaiset 7 mittaiset jonot, joissa ensin tehdään n tyypin (1) askelta ja sitten $7 - n$ tyypin (2) askelta.

Jos $n \leq 2$, poistettujen kuorien määrä on korkeintaan $2 + 2 \cdot 7 < 20$.

Jos $n = 3$, poistettujen kuorien määrä on $3 + 3 \cdot 4 < 20$.

Jos $n = 4$, poistettujen kuorien määrä on $4 + 4 \cdot 3 < 20$.

Jos $n = 5$, poistettujen kuorien määrä on $5 + 5 \cdot 2 < 20$.

Jos $n \geq 6$, poistettujen kuorien määrä on korkeintaan $7 + 7 \cdot 1 < 20$.

7. Jarno on tekemässä terveystiedon monivalintakoetta. Kokeessa on 100 kohtaa, ja jokaisessa kohdassa on kaksi vaihtoehtoa, A ja B, joista jompikumpi on oikea vastaus.

Jarnon opettaja on lepsu, ja niinpä hän on kertonut, että jokaisessa peräkkäisessä viidessä kohdassa on täsmälleen kolme kohtaa, joihin A on oikea vastaus. Ennen kokeen alkua opettaja vielä paljastaa, että ensimmäiseen ja viimeiseen kohtaan B on oikea vastaus.

Jarnolta on jäänyt terveystiedon opiskelu vähemmälle, mutta hän on ahkerasti treenannut matematiikkaolympialaisiin, ja hän tajuaa, että kokeen pystyy tekemään täysin oikein pelkästään opettajan paljastusten avulla. Määritä kokeen oikeat vastaukset.

7. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Oikeissa vastauksissa blokki $BAAAB$ toistuu 20 kertaa.

Olkoon X neljä peräkkäisen oikean vastauksen blokki, joka ei sisällä ensimmäistä tai viimeistä vastausta. Olkoon X_e blokki, johon on otettu X:ää edeltävä vastaus X:n lisäksi, ja X_s blokki,johon on otettu X:ää seuraava vastaus X:n lisäksi. Koska X_e:ssä ja X_s:ssä on yhtä monta A-vastausta, X:ää edeltävä vastaus on sama kuin X:ää seuraava. Tämä tarkoittaa sitä, että oikeassa rivissä viiden kirjaimen blokki toistuu 20 kertaa.

Toistuvan blokin ensimmäinen ja viimeinen kirjain on opettajan viimeisen paljastuksen nojalla B. Koska blokissa on kolme A-kirjainta, sen on pakko olla BAAAB.

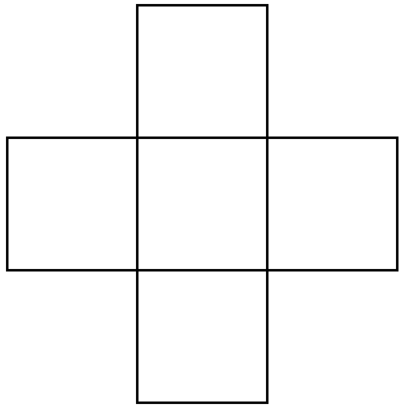
8. 1000×1000 ruudun ruudukon jokaisessa ruudussa on robotti. Kun käyttäjä painaa start-nappulaa, jokaisella robotilla on kaksi mahdollisuutta:

- Pysyä samassa ruudussa.
- Siirtyä viereiseen ruutuun (kaksi ruutua ovat vierekkäisiä, jos niillä on yhteinen sivu.)

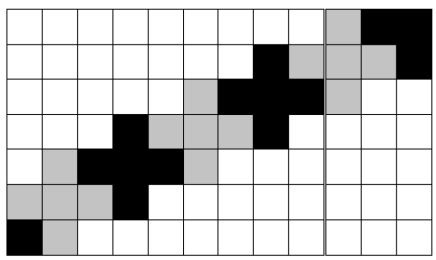
Samassa ruudussa saa siirtymän jälkeen olla useampi robotti. Robotit on ohjelmoitu niin, että start-nappulan painamisen jälkeen ne jättävät mahdollisimman monta ruudukon ruutua tyhjäksi, ja ne koordinoivat tämän yhdessä.

Olkoo n niiden ruutujen lukumäärä, joissa on robotti siirtymän jälkeen. Osoita, että $200000 \leq n < 203000$.

8. tehtävän ratkaisu: Jos on viisi ruutua kuten kuvassa



näistä viidestä ruudusta robotit voivat siirtyä keskimmäiseen ruutuun. Toisaalta tällaisista viisikoista voidaan tehdä ääretön nauha kuten kuvassa



ja tällaisilla nauhoilla voidaan peittää taso, niin, että jokaista ruutua peittää täsmälleen yksi nauha.

Tutkitaan sitten 1000×1000 -ruudukkoa. Kahta reunimmaista ruutukerrosta lukuunottamatta ruudukko voidaan siis peittää ylläolevan kaltaisilla viisikoilla (osa viisikoista voi mennä kahden reunimmaisen ruutukerroksen päälle). Kahdessa reunimmaisessa ruutukerroksessa on alle 8000 ruutua. Nämä alle 8000 ruutua voidaan 16 kulmaruutua lukuunottamatta peittää sellaisilla nelikoilla, jotka ovat kuten viisikko yllä, mutta yksi reunaruuduista puuttuu (osa nelikoista voi mennä 16 kulmaruudun päälle, eikä myöskään haittaa, jos joku viisikolla peitetty ruutu tulee uudelleen peitetyksi nelikoilla). Näin ollen robotit voidaan ohjelmoida siirtymään niin, että siirtymän jälkeen niitä on alle $\frac{1000000}{5} + \frac{8000}{4} + 16 \leq 203000$ ruudussa.

Toisaalta, koska jokaisella ruudulla on vain neljä naapuria, yhdessä ruudussa voi siirtymän jälkeen olla korkeintaan 5 robottia. Näin ollen robotillisia ruutuja on vähintään $\frac{1000000}{5} = 200000$.

9. Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jossa kaikki kulmat ovat alle 180 astetta. Olkoon J janan BA jatke A:sta eteenpäin ja J' janan CD jatke D:stä eteenpäin. Oletetaan, että J ja J' leikkaavat, olkoon E leikkauspiste. Olkoon K janan CB jatke B:stä eteenpäin ja K' janan DA jatke A:sta eteenpäin. Oletetaan, että K ja K' leikkaavat, olkoon F leikkauspiste.

Oletetaan, että kolmioilla BDF ja BDE on sama ala. Osoita, että janat BD ja EF ovat yhdensuuntaiset.

9. tehtävän ratkaisu:

Jatketaan BD suoraksi. Ajatellaan BD kolmioiden BDF ja BDE kannaksi. Koska kolmion ala on kanta kertaa korkeus, ja kolmioilla BDF ja BDE on sama ala, pisteet E ja F ovat yhtä kaukana suorasta BD, ja ne ovat sen samalla puolella.

Siis janat BD ja EF ovat yhdensuuntaisia.

10. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

10. tehtävän ratkaisu:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}=\frac{a^2}{ac}+\frac{c}{b},$$

ja soveltamalla aritmeettis-geometristä epäyhtälöä saadaan

$$\frac{a^2}{ac}+\frac{c}{b}\geq\frac{2a\sqrt{c}}{\sqrt{acb}}=\frac{2a}{\sqrt{ab}}.$$

Soveltamalla alakertaan aritmeettis-geometristä epäyhtälöä saadaan

$$\frac{2a}{\sqrt{ab}}\geq\frac{4a}{a+b}.$$

Vaikeampia tehtäviä

11. 5-kulmion jokaiseen sivuun ja kärkeen merkitään positiivinen kokonaisluku niin, että käytetään 10 eri lukua. Lisäksi tämä tehdään niin, että kun lasketaan yhteen sivun luku ja sen viereisten kärkien luvut, saadaan vakioarvo, joka ei riipu sivun valinnasta.

Mikä on yllä pienin mahdollinen sivun ja sen viereisten kärkien lukujen summa?

11. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Pienin summa on 14.</u>

Olkoon K kärkien summa ja S sivujen summa. Nyt tehtävässä kysytty luku on $\frac{2K+S}{5}$, joka luonnollisesti minimoituu, kun kärjet on numeroitu 1-5 ja sivut 6-10. Tällöin tehtävässä kysytty luku on $2\cdot\frac{1+5}{2}+\frac{10+6}{2}=14$.

Vielä pitää osoittaa, että numerointi voidaan tehdä niin, että arvo 14 saavutetaan. Kun numerointia lähdetään etsimään kokeilemalla havaitaan, että sivun 10 viereisten kärkien täytyy olla 1 ja 3, ja lisäksi kärjet 4 ja 5 eivät voi olla vierekkäisiä. Näillä rajoitteilla kokeiltavat vaihtoehdot saadaan hyvin vähiin, ja löytyy seuraava numerointi: Kärjet ovat vastapäivään lueteltuna $1,3,5,2,4$, ja sivut vastapäivään lueteltuna $10,6,7,8,9$. Lisäksi sivu 10 on kärkien 1 ja 3 välissä.

12. Olkoo ABC kolmio. Sivulta AC valitaan piste E ja sivulta AB piste F. Olkoon janojen BE ja CF leikkauspiste P. Tiedetään seuraavat:

- Kolmion PEC ala on 7.
- Kolmion PFB ala on 4.
- Kolmion PBC ala on 8.

Määritä nelikulmion $AEPF$ ala.

12. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** $|AEPF|=21$</u> Ajatellaan kolmiota APF niin, että PF on kanta, ja ajatellaan kolmiota PCA <u>niin, että PC on kanta</u>. Näillä kolmioilla on sama korkeus. Ajatellaan samoin kolmiota PFB niin, että sen kanta on PF ja kolmiota PBC niin, että sen kanta on PC. Nyt näilläkin kahdella kolmiolla on keskenään sama korkeus. Siis

$$\frac{|APF|}{|APE+7|}=\frac{|APF|}{|APC|}=\frac{|PF|}{|PC|}=\frac{|PFB|}{|PBC|}=\frac{4}{8}.$$

Siis $\frac{|APF|}{|APE+7|}=\frac{1}{2}$.

Symmetrisellä päättelyllä saadaan $\frac{|APE|}{|APF+4|}=\frac{7}{8}$.

Ratkaisemalla kahden edellisen yhtälön muodostama yhtälöryhmä saadaan $|APF|=\frac{28}{3}$ ja $|APE|=\frac{35}{3}$, mistä saadaan $|AEPF|=21$.

13. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $n>1$ pätee $(n-1)^2|n^{n-1}-1$.

13. tehtävän ratkaisu: Tapaus $n = 2$ on helppo verifioida erikseen. Alla oletetaan $n \geq 3$.

$$n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \cdots + 1).$$

Riittää siis osoittaa, että $n-1$ jakaa luvun $n^{n-2} + n^{n-3} + \cdots + 1$.

Selvästi $n \equiv 1 \mod n-1$, mistä seuraa kaikilla luonnollisilla luvuilla k, että $n^k \equiv 1 \mod n-1$.

Siis $n^{n-2} + n^{n-3} + \cdots + 1 \equiv n-1 \equiv 0 \mod n-1$, ja $n-1$ jakaa luvun $n^{n-2} + n^{n-3} + \cdots + 1$.

14. Olkoon S joukko, joka sisältää n positiivista reaalilukua, $n \geq 3$. Osoita, että korkeintaan $n-2$ eri kolmosen potenssia voidaan kirjoittaa summana kolmesta eri S:n alkiosta.

14. tehtävän ratkaisu: Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 3$, väite itsestäänselvästi pätee.

Oletetaan sitten, että väite pätee luvulle n. Olkoon S' joukko, joka sisältää $n+1$ positiivista reaalilukua. Olkoon 3^k suurin kolmosen potenssi, joka voidaan kirjoittaa summana kolmesta eri S':n alkiosta, olkoon nämä a, b, c. Jos $a, b, c < 3^{k-1}$, on mahdotonta, että $a + b + c = 3^k$. Siis symmetrian perusteella voidaan olettaa, että $a \geq 3^{k-1}$. Mutta nyt a ei voi esiintyä yhdessäkään toisessa summassa, joka on kolmosen potenssi.

Olkoon $S = S' \setminus a$. Nyt induktio-oletuksen nojalla on korkeintaan $n-2$ kolmosen potenssia, jotka voidaan kirjoittaa summina kolmesta S:n alkiosta. Nyt nämä kolmosen potenssit sekä 3^k ovat ainoat, jotka voidaan kirjoittaa summina kolmesta S':n alkiosta. Näitä kolmosen potensseja on siis korkeintaan $n-2+1 = (n+1)-2$,

15. Olkoon a, b positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b.$$

,

15. tehtävän ratkaisu: Koska $x^2 + y^2 \geq 2xy$, pätee $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$, eli $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + y$.

Valitsemalla $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ja $y = \sqrt{ab}$ saadaan

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq \sqrt{2(\frac{a^2 + b^2}{2} + ab)} = \sqrt{2\frac{(a+b)^2}{2}} = a + b.$$

16. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja.

Osoita, että

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(a-c)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

16. tehtävän ratkaisu: Oletetaan symmetrian perusteella, että $a \leq b, c$. Merkitään $b = a + b'$ ja $c = a + c'$. Nyt saadaan

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(a-c)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2}{(b'-c')^2} + \frac{(a+b')^2}{c'^2} + \frac{(a+c')^2}{b'^2} \geq$$

$$\frac{b'^2}{c'^2} + \frac{c'^2}{b'^2} = \frac{b'^4 + c'^4}{c'^2 b'^2},$$

joka on aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla vähintään 2.

17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon $T \subset S$ epätyhjä. Sanomme, että T on tasapainoinen, jos T:n alkioiden mediaani on sama kuin T:n alkioiden keskiarvo. Osoita, että tasapainoisten S:n osajoukkojen määrä on pariton.

Joukon T alkioiden mediaani on $t \in T$, jos joukossa T on yhtä monta t:tä suurempaa lukua kuin t:tä pienempiä lukuja. Jos taas joukossa T on luvut $t_0 < t_1$, joille t_0:n ja t_1:n välissä ei ole T:n lukuja, ja on yhtä monta t_0:aa pienempää T:n lukua kuin t_1:tä suurempia T:n lukuja, T:n alkioiden mediaani on lukujen t_0 ja t_1 keskiarvo.

17. tehtävän ratkaisu: Olkoon $T \subset S$. Määritellään $f(T) = \{s \in S \mid n - s \in T\}$. Nyt huomataan kolme asiaa: (1) Kaikilla T pätee $T = f(f(T))$. (2) $f(T)$:n keskiarvo on $n - k$, missä k on T:n keskiarvo, ja $f(T)$:n mediaani on $n - m$, missä m on T:n mediaani. Jos siis T on tasapainoinen, myös $f(T)$ on tasapainoinen. (3) Jos $T = f(T)$ ja T on epätyhjä, sekä T:n mediaani että keskiarvo on $n/2$, ja siis T on tasapainoinen.

Jos T on tasapainoinen, mutta $f(T) \neq T$, T:tä ja $f(T)$:tä voidaan ajatella parina. On siis parillinen määrä tasapainoisia joukkoja, joille $T \neq f(T)$.

Siis riittää osoittaa, että epätyhjiä joukkoja, joille $T = f(T)$ on pariton määrä. Kutsutaan joukkoja, joille $T = f(T)$ supertasapainoisiksi (myös tyhjä joukko lasketaan supertasapainoiseksi). Supertasapainoisia joukkoja siis luonnehtii se, että $k \in T$ jos ja vain jos $n - k \in T$.

Jos T on supertasapainoinen, $S \setminus T$ on myös supertasapainoinen, ja T:tä ja $S \setminus T$:tä voidaan ajatella parina. On siis parillinen määrä supertasapainoisia joukkoja. Yksi näistä on kuitenkin tyhjä joukko, joten epätyhjiä supertasapainoisia joukkoja on pariton määrä.

18. Olkoon $x_1, \ldots, x_n$ reaalilukuja, joille

$$\sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k, x_{k+1}) = \min(x_1, x_n).$$

Osoita, että $\sum_{k=2}^{n-1} x_k \geq 0$.

Huom! $\min(a, b)$ *on pienempi luvuista* a, b.

18. tehtävän ratkaisu: Huomataan, että $\min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$. Merkitään $S = \sum_{k=2}^{n-1} x_k$.

Nyt

$$\min(x_1, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1} + x_k}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{2} =$$

$$S + \frac{x_1 + x_n}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{2},$$

josta saadaan

$$\frac{x_1 + x_n}{2} - \frac{|x_n - x_1|}{2} = S + \frac{x_1 + x_n}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|x_{k+1} - x_k|}{2}.$$

Tästä saadaan $2S = (\sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k|) - |x_n - x_1| \geq 0$.

Viimeinen epäyhtälö saadaan käyttämällä toistuvasti kaavaa $|a - b| + |b - c| \geq |a - c|$.

19. 2-ulotteisessa koordinatistossa on annettu monikulmio M, jonka pinta-ala on suurempi kuin 1. Osoita, että M:ssä on 2 eri pistettä (x, y) ja (x', y'), joille $x - x'$ ja $y - y'$ ovat kokonaislukuja. (Nämä pisteet voivat sijaita joko M:n sisällä tai reunalla.)

19. tehtävän ratkaisu: Määritellään kuvaus $f \colon M \to [0, 1[^2$, missä piste (x, y) kuvautuu arvoksi (x_f, y_f), missä x_f ja y_f ovat lukujen x ja y desimaaliosat.

Olkoon x_0, y_0 kokonaislukuja, ja olkoon $P = \{(x_0 + x_t, y_0 + y_t) \mid x_t, y_t \in [0, 1[\}$. Nyt joukoilla $P \cap M$ ja $f(P \cap M)$ on sama pinta-ala. Lisäksi M voidaan esittää äärellisenä yhdisteenä joukoista tyyppiä $M \cap P$, missä P on kuten yllä. Jos siis f on injektio, joukoilla M ja fM on sama pinta-ala.

Oletetaan, että f ei ole injektio. Nyt on olemassa pisteet $(x, y) \in M$ ja $(x', y') \in M$, joille $f(x, y) = f(x', y')$. Mutta nyt (x, y) ja (x', y') ovat tehtävässä vaaditut luvut, ja tehtävä on ratkaistu. Jatkossa voidaan siis olettaa, että f on injektio.

Koska joukoilla M ja fM on sama pinta-ala ja $fM \subset [0, 1[^2$, fM:n pinta-ala on korkeintaan 1, ja siis M:n pinta-ala on korkeintaan 1. Ristiriita oletuksen kanssa.

20. 12 ritaria istuu (tasavälein) pyöreän pöydän ääreen. Kun he ovat istuneet, he huomaavat, että pöydässä on paikoilla nimilaput, jotka luonnollisesti eivät vastaa ritarien nykyisiä istumapaikkoja.

Osoita, että vähintään kaksi ritaria istuu omilla paikoillaan, tai sitten pöytää on mahdollista pyöräyttää niin, että vähintään kaksi ritaria istuu nimilappuja vastaavilla paikoilla pyöräytyksen jälkeen.

20. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus. Siitä seuraa, että jokaisella $n = 0, \dots, 11$ on täsmälleen yksi ritari niin, että kun pöytää pyöräytetään n askelta vastapäivään, tämä ritari istuu omalla paikallaan.

Muodostetaan funktio f ritarien joukolta ritarien joukolle niin, että jokainen ritari x kuvautuu sille ritarille $f(x)$, jonka nimilappu on ritarin x paikalla. Liitetään jokaiseen ritariin x luku $\ell(x)$ niin, että $\ell(x)$ on se, kuinka monta askelta vastapäivään $f(x)$ istuu x:stä.

Olkoon x joku ritareista, ja muodostetaan jono $J =(x, f(x), f(f(x), \dots, f(\dots f((x))) = y)$ niin, että y on ensimmäinen ritari jonossa, joka esiintyy jonossa aiemminkin. Nyt on pakko olla $y = x$, koska jos näin ei ole, myös y:tä jonossa edeltävä ritari esiintyy jonossa aiemmin. Muodostetaan summa $s_x = \ell(x) + \ell(f(x)) + \dots + \ell(f(\dots f((x))))$, missä lasketaan yhteen kaikkien jonon J jäsenten ℓ-luvut paitsi viimeisen (eli x:n lukua ei lasketa kahteen kertaan). Nyt s_x on jaollinen luvulla 12, koska jono $x, f(x), \dots, f(\dots f(x)) = y$ kiertää pöydän ympäri tasakierroksia, kun kaikilla jonon jäsenillä z siirtymän $z \mapsto f(z)$ ajatellaan tapahtuvan vastapäivään.

Jos J ei sisällä kaikkia ritareita, valitaan ritari x', joka ei ole jonossa, ja muodostetaan samaan tapaan jono J'. Nyt J' ja J eivät voi sisältää yhtään yhteistä jäsentä, koska jos jonon J' jäsen y' kuuluu myös jonoon J, myös y':a edeltävä J':n jäsen sisältyy jonoon J, ja päättelyä toistamalla x' sisältyy jonoon J, mikä on vastoin oletusta.

Valitaan samaan tapaan x'', x''' jne, kunnes jokainen ritari on yhdessä ja vain yhdessä jonossa $J, J', J'', \dots$. Nyt $s = s_x + s_{x'} + s_{x''} + \dots$ on jaollinen luvulla 12. Toisaalta $s = \sum_x \ell(x) = \sum_{i=0\dots11} i$ ei ole jaollinen luvulla 12, ristiriita.