Lokakuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 4.12.2022 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Määritä kaikki lukuparit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, joille tulo ab on jaollinen luvulla 6, ja $a \leq b$.

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:**

- $b = 6$, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $a = 2, b = 3$.
- $a = 3, b = 4$.

Jos $b = 6$, ab on aina jaollinen luvulla 6.

Oletetaan sitten, että $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koska $6 = 2 \cdot 3$, toisen luvuista a, b täytyy olla jaollinen luvulla 2 ja toisen luvulla 3. Joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ainoa kolmella jaollinen luku on 3, ja ko, joukon kahdella jaolliset luvut ovat 2 ja 4. Näin ainoat ratkaisut ovat $a = 2, b = 3$ ja $a = 3, b = 4$.

2. Muodostetaan vihko taittamalla keskenään samankokoisia paperiarkkeja kahtia ja laittamalla taitetut arkit sisäkkäin. Nidotaan vielä selästä arkit toisiinsa kiinni. (Edellä on siis kuvattu ihan tavallisen vihkon tekotapa.) Lasketaan vihkon sivujen lukumäärä, kun myös kansiksi ja sisäkansiksi sattuneet sivut lasketaan sivuiksi.

Voiko näin syntyneessä vihkossa olla tasan 22 sivua? Entä 24?

2. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ei voi olla 22 sivua, mutta voi olla 24 sivua.

Jokaisesta paperiarkista tulee vihkoon neljä sivua. Siis vihkon sivujen määrä on neljällä jaollinen, joten se ei voi olla 22. Sitä vastoin 24 sivuun päästään tekemällä vihko kuudesta paperiarkista.

3. Shakkilaudan jossain ruudussa on nappula. Nappulan siirto tarkoittaa sen siirtämistä viereiseen ruutuun vaaka- tai pystysuoraan, mutta ei vinottain. Nappulaa siirretään näin 11 kertaa. Osoita, että nappula ei ole näiden 11 siirron jälkeen siinä ruudussa, missä se oli alussa.

3. tehtävän ratkaisu: Kaikissa siirroissa nappula siirretään joko mustasta ruudusta valkoiseen ruutuun tai valkoisesta ruudusta mustaan ruutuun. Siirtosarjassa sen ruudun väri, jossa nappula on siis vaihtuu joka siirrolla. Näin ollen nappula on parillisen siirtomäärän jälkeen samanvärisessä ruudussa kuin alussa ja parittoman siirtomäärän jälkeen erivärisessä ruudussa kuin alussa.

11 siirron jälkeen nappula on siis erivärisessä ruudussa kuin alussa, joten se ei voi olla samassa ruudussa kuin alussa.

4. Olkoon S ympyrä, jonka säde on 1 ja keskipiste P. Olkoon T ympyrä, jonka säde on $\frac{1}{2}$, ja jolle piste P sijaitsee ympyrän T sisällä. Osoita, että ympyrä T sijaitsee ympyrän S sisällä.

Huom! Olkoon A ympyrä. Ympyrän A kehän pisteiden ei katsota sijaitsevan ympyrän A sisällä.

4. tehtävän ratkaisu: Ympyrän S sisällä sijaitsevat täsmälleen ne pisteet, joiden etäisyys P:stä on pienempi kuin 1. Olkoon Q ympyrän T keskipiste. Olkoon x pisteen P etäisyys Q:sta. Nyt $x < \frac{1}{2}$. Olkoon R piste ympyrän T kehällä. Nyt pisteiden R ja Q etäisyys on $\frac{1}{2}$. Nyt pisteiden P ja R etäisyys on korkeintaan $x + 1/2 < 1$. Siis R sijaitsee ympyrän S sisällä.

Siis jokainen ympyrän T kehän piste sijaitsee ympyrän S sisällä, ja siis ympyrä T sijaitsee ympyrän S sisällä.

5. Olkoon G suuntaamaton verkko. A ja B pelaavat seuraavaa peliä: Ensin A asettaa kaksi pelinappulaa verkon joihinkin solmuihin. Sitten varsinainen peli alkaa, ja B aloittaa sen. Vuorollaan B siirtää jopaakumpaa pelinappulaa verkon solmusta toiseen verkon särmää pitkin. Vuorollaan A poistaa verkosta yhden särmän.

A voittaa pelin, jos B:llä ei ole yhtään laillista siirtoa jäljellä. B voittaa, jos hän saa kummankin pelinappulan siirrettyä samaan solmuun.

Määritä kaikki verkot G, joille B:llä on pelissä voittostrategia.

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** B:llä on voittostrategia jos ja vain jos G koostuu yhdestä klikistä.

Jos G koostuu yhdestä klikistä, B luonnollisesti voittaa ensimmäisellä siirrollaan.

Jos taas G ei koostu yhdestä klikistä, on solmut a ja b, joiden välillä ei ole särmää. A laittaa pelinappulat alussa tällaisiin solmuihin.

Myöhemmillä siirroillaan A aina poistaa verkosta särmän niiden solmujen väliltä, joissa pelinappulat ovat (tai minkä tahansa särmän, jos pelinappulasolmujen välillä ei ole särmää.)

Nyt B on jokaisella vuorollaan siinä tilanteessa, että niiden solmujen välillä, joissa pelinappulat ovat, ei ole särmää, joten hän ei voi voittaa.

6. Määritellään $a_1 = 5$, ja induktiivisesti $a_{i+1} = 7 + a_i$. Osoita, että yksikään luku tässä äärettömässä jonossa ei ole neliöluku.

6. tehtävän ratkaisu: $1^1 \equiv 1 \mod 7$.
$2^2 \equiv 4 \mod 7$.
$3^2 \equiv 2 \mod 7$.
$4^2 \equiv 1 \mod 7$.
$5^2 \equiv 4 \mod 7$.
$6^2 \equiv 1 \mod 7$.
$7^2 \equiv 0 \mod 7$.

Siis yksikään neliö ei ole $\equiv 5 \mod 7$. Toisaalta kaikki jonon (a_i) jäsenet ovat muotoa $5+7k$, ja $5+7k \equiv 5 \mod 7$, joten jonon jäsenet eivät ole neliölukuja.

7. Osoita, että on olemassa joukko S, joka koostuu viidestä tason pisteestä, ja joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- Mitkään kolme joukon S pistettä eivät ole samalla suoralla.
- On vain yksi joukon S neljän pisteen osajoukko T, jolle T:n pisteet ovat konveksin nelikulmion kärjet.

Monikulmio on konveksi, jos sen kaikki kulmat ovat alle 180 astetta.

7. tehtävän ratkaisu: $S = \{A, B, C, D, E\}$, missä pisteet A, B, C, D, E on valittu seuraavasti: A, B, C ovat tasasivuisen kolmion kärjet, ja D sen keskipiste. Olkoon F suoran AD ja sivun BC leikkauspiste. Valitaan E:ksi jokin kolmion BFD sisäpiste.

Jos S:n pisteistä yritetään valita konveksin nelikulmion kärjet, kaikki pisteet A, B, C eivät voi olla kärkinä, koska pisteet D, E ovat kolmion ABC sisällä. Konveksin nelikulmion kärjet ovat siis D, E ja kaksi pistettä joukosta $\{A, B, C\}$.

Nyt A, B, E, D ovat konveksin nelikulmion kärjet.

Piste E on kolmion BCD sisällä, joten B, C, D, E eivät ole konveksin nelikulmion kärjet. Piste D on kolmion ACE sisällä, joten A, C, D, E eivät ole konveksin nelikulmion kärjet.

Kaikki S:n neljän pisteen osajoukot on nyt käyty läpi, ja A, B, D, E oli ainoa, jonka pisteet ovat konveksin nelikulmion kärjet.

8. 15 joukkuetta pelaa lentopallosarjan. Jokainen joukkue pelaa kerran jokaista muuta joukkuetta vastaan, ja jokaisessa pelissä toinen joukkueista voittaa ja toinen häviää.

Jatkoon pääsevät ne joukkueet, jotka ovat hävinneet korkeintaan kolme peliä.

(a) Osoita, että on mahdollista, että seitsemän joukkuetta pääsee jatkoon.

(b) Osoita, että on mahdotonta, että kahdeksan joukkuetta pääsee jatkoon.

8. tehtävän ratkaisu: (a) Muodostetaan sarjataulukko niin, että rivillä on joukkueen tulokset, ykkönen voitosta ja nolla häviöstä. Rivillä vasemmalta oikealle joukkueet ovat samassa järjestyksessä kuin taulukon rivit. (Niin, että esim. solussa $(2, 3)$ on toiseksi tulleen joukkueen tulos kolmanneksi tullutta joukkuetta vastaan.)

X	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	X	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	X	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	X	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	X	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	X	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	X	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X

Koska taulukossa on solussa (i, j) ykkönen jos ja vain jos solussa (j, i) on nolla, on kyseessä oikeaa muotoa oleva sarjataulukko, ja taulukkoa lukemalla selviää, että tosiaan on seitsemän joukkuetta, jotka ovat hävinneet vain kolme peliä.

(b) Jos kahdeksan joukkuetta pääsee jatkoon, näiden kahdeksan joukkueen keskinäisissä peleissä jokaisen joukkueen pitäisi saada vähintään neljä voittoa, eli voittoja olisi yhteensä vähintään $4 \cdot 8 = 32$. Kuitenkin kahdeksan joukkueen keskinäisiä pelejä on vain $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, eli niissä ei voi saada 32 voittoa.

9. Olkoot a, b, c kolmion sivujen pituudet. Osoita, että

$$\frac{(a^{2022} + b^{2022})(a + c)}{b} + \frac{(b^{2022} + c^{2022})(b + a)}{c} + \frac{(c^{2022} + a^{2022})(c + b)}{a} > 2(a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}).$$

9. tehtävän ratkaisu: Koska a, b, c ovat kolmion sivujen pituudet, $a + c > b$. Näin ollen $\frac{(a^{2022}+b^{2022})(a+c)}{b} > a^{2022} + b^{2022}$.

Vastaavasti $\frac{(b^{2022}+c^{2022})(b+a)}{c} > b^{2022} + c^{2022}$ ja $\frac{(c^{2022}+a^{2022})(c+b)}{a} > a^{2022} + c^{2022}$.

Tehtävänannon epäyhtälö saadaan laskemalla nämä kolme epäyhtälöä yhteen.

10. Väriliituja on neljää eri väriä, kuusi liitua jokaista väriä. Ne on jaettu kuudelle lapselle niin, että jokaisella lapsella on neljä liitua.

Kuvataideohjaaja valitsee osan lapsista piirtämään yhteistä kuvaa. Jokainen lapsi käyttää niitä liituja joita hänellä on, ja kuvataideohjaaja valikoi lapset niin, että kuvaan tulee jokaista väriä. Lisäksi kuvataideohjaaja valitsee niin pienen määrän lapsia kuin mahdollista.

Mikä on suurin määrä lapsia, jonka kuvataideohjaaja voi joutua valitsemaan?

10. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kuvataideohjaaja voi joutua valitsemaan korkeintaan kolme lasta.

Koska yhden värin väriliitujen määrä ei ole jaollinen neljällä (jokaisen lapsen liitumäärä), jollain lapsella on vähintään kahta väriä. Valitsemalla tämä lapsi ja yksi lapsi kumpaakin puuttuvaa väriä kohti huomataan, että aina voidaan valita korkeintaan kolme lasta.

Olkoot $1, 2, 3, 4$ värit. Jos liidut ovat jakautuneet lapsille 1111, 2222, 3333, 1144, 2244, 3344 nähdään, että kahden lapsen valitseminen ei riitä.

Vaikeampia tehtäviä

11. Meillä on $10 \times 10 \times 1$ yksikön kokoinen laatikko. Sinne pitäisi saada mahtumaan 106 palloa, joiden läpimitta on 1. Kuinka homma onnistuu?

11. tehtävän ratkaisu: Ensin laitetaan 9 riviä vuorotellen 10 ja 9 pallon rivejä niin, että ne muodostavat "mehiläiskennomuodon". Sitten laitetaan vielä kaksi kymmenen pallon riviä päällimmäiseksi.

Nyt palloja on laitettu $5 \times 10 + 4 \times 9 + 2 \times 10$, eli yhteenssä 106 palloa.

Tarkistetaan vielä, että kasan korkeus on alle 10. "Mehiläiskennomuodossa" korkeus rivin pallojen keskipisteestä seuraavan rivin pallojen keskipisteeseen saadaan ratkaistua yhtälöstä $(1/2)^2 + x^2 = 1^2$, josta saadaan $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Näin ollen "mehiläiskennokonstruktion" korkeus on

$$\frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2},$$

ja niiden kahden ylimääräisen rivin korkeus on 2.

Summaksi saadaan $3 + 4\sqrt{3} = 9,93$, eli alle 10.

12. Positiiviset kokonaisluvut m, n, k toteuttavat yhtälön

$$m^2 + n = k^2 + k.$$

Osoita, että $m \leq n$.

12. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus $m > n$, kerrotaan yhtälö puolittain neljällä ja lisätään puolittain yksi. Saadaan

$$4m^2 + 4n + 1 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Nyt

$$4m^2 + 4m + 1 > 4k^2 + 4k + 1 > 4m^2,$$

mistä saadaan

$$(2m+1)^2 > (2k+1)^2 > (2m)^2.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, koska $(2m+1)^2$ ja $(2m)^2$ ovat peräkkäiset neliöt, eikä niiden välissä voi olla neliötä.

13. Luonnollisen luvun n kymmenjärjestelmäesityksessä on $6k$ numeroa (k luonnollinen luku), ja n on jaollinen luvulla 7. Osoita, että kun n:n viimeinen (ykkösiä osoittava) numero siirretään luvun ensimmäiseksi, saatu luku on edelleen jaollinen luvulla 7.

13. tehtävän ratkaisu: Olkoon x luvun n viimeinen numero ja y muiden numeroiden muodostama luku.

Siis tiedetään

$$x + 10y \equiv 0 \mod 7,$$

ja halutaan todistaa

$$y + 10^{6k-1}x \equiv 0 \mod 7.$$

Fermat'n pienen lauseen perusteella

$$10^6 \equiv 1 \mod 7,$$

mistä seuraa

$$10^{6k} \equiv 1 \mod 7.$$

Nyt

$$y + 10^{6k-1}x \equiv y - 10y(10^{6k-1}) \equiv y - 10^{6k}y \equiv y - y \equiv 0 \mod 7.$$

14. 8×8 -shakkilaudalle laitetaan n tornia niin, että kaikille tornipareille (a, b) pätee seuraava: Laudalla on tyhjä ruutu, jota sekä a että b uhkaa.

Mikä on suurin n:n arvo, jolla tämä onnistuu?

Torni t uhkaa tyhjää ruutua r, jos t ja r ovat joko samalla pysty- tai vaakarivillä, eikä t:n ja r:n välissä ole nappuloita.

14. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Maksimi on $n = 11$.

Huomataan, että yhdellä vaakarivillä ei voi olla enempää kuin kaksi tornia. Jos niitä nimittäin olisi kolme, reunimmaiset eivät uhkaisi yhteistä ruutua.

Oletetaan, että vaakarivillä on tornit t ja t'. Jos t'', t''' ovat muulla vaakarivillä olevat tornit, ei ole mahdollista, että t'':n ja t''':n vaakakoordinaateista toinen olisi t:n ja t':n vaakakoordinaattien välissä, ja toinen ei olisi. (Tehdään vastaoletus: Vaakakordinaattien järjestys on t, t'', t', t'''. Nyt t:llä ja t''':lla ei ole yhteistä uhattua ruutua. Ristiriita. Muut järjestykset ovat symmetrisiä.)

Merkitään $d(t, t')$:lla tornien t, t' etäisyyttä. Edellämainitusta seuraa, että jos t ja t' ovat samalla vaakarivillä, ja t_0 ja t_0' ovat samalla vaakarivillä, $|d(t, t') - d(t_0, t_0')| \geq 2$. Koska lisäksi vierekkäisissä ruuduissa ei voi olla torneja, on maksimissaan kolme vaakariviä, joilla on kaksi tornia.

Olemme siis saaneet osoitettua, että $n \leq 11$.

Yksitoista tornia saadaan asetettua laudalle, kun toisen diagonaalin jokaiseen ruutuun sijoitetaan torni, ja lisäksi toisen diagonaalin kolmeen ensimmäiseen ruutuun (jommastakummasta kulmasta lukien) asetetaan torni.

15. Olkoon a, b, c reaalilukuja, joille $s_n = a^n + b^n + c^n$ kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla.

Oletetaan lisäksi, että $s_1 = 2$, $s_2 = 6$ ja $s_3 = 14$.

Osoita, että kaikillla positiivisilla kokonaisluvuilla $n > 1$ pätee

$$|s_n^2 - s_{n+1}s_{n-1}| = 8.$$

15. tehtävän ratkaisu: Nyt $ab + bc + ca = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) = -1$.

Lisäksi $3abc = s_3 + 3s_1(ab + bc + ca) - s_1^3 = 0$.

Siis yksi luvuista a, b, c on nolla, ja symmetrian perusteella voidaan olettaa $c = 0$.

Siis $a + b = 2$, $a^2 + b^2 = 6$ ja $ab = -1$.

Nyt $s_n^2 - s_{n-1}s_{n+1} = (-1)^n 8$ saadaan suoralla laskulla, kun muistetaan, että $c = 0$ ja $a^k b^k = (-1)^k$ kaikilla k.

16. Määritellään $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = (n + 1)(a_1 + \cdots + a_n)$.

Millä n:n arvoilla a_n on jaollinen luvulla $n!$.

16. tehtävän ratkaisu: Koska $a_{n-1} = (n-1)(a_1 + \cdots + a_{n-1})$ ja $a_n = (n)(a_1 + \ldots, a_{n-1}) + na_{n-1}$, saadaan

$$a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} + na_{n-1} = \frac{n^2}{n-1}a_{n-1}$$

.

Tästä saadaan induktiolla $a_n = \frac{n}{2}n!$, kun $n > 1$.

Tästä muodosta nähdään välittömästi, että luvuille $n > 1$ luku a_n on jaollinen $n!$:lla jos ja vain jos n on parillinen. $a_1 = 1$ on lisäksi jaollinen luvulla $1!$.

17. Taululle on kirjoitettu luvut $1, 2, \ldots, 2022$. Allan pelaa peliä, jossa hän valitsee taululta kaksi lukua a, b, poistaa ne taululta ja kirjoittaa taululle lukujen a, b keskiarvon. 2021 askeleen jälkeen taululla on vain yksi luku c.

Osoita, että c:ksi voidaan jättää mikä tahansa kokonaisluku luvusta 2 lukuun 2021.

17. tehtävän ratkaisu: Osoitetaan ensin, että luku 2 voidaan saada.

$(n, n+1, n+2)$ voidaan muuttaa $(n+1, n+1)$, joka voidaan muuttaa $(n+1)$. Kutsutaan tätä muutokseksi A.

$(n, n + 2)$ voidaan muuttaa $(n + 1)$. Kutsutaan tätä muutokseksi B.

Lähdetään liikkeelle jonosta $1, 2, \ldots, 2022$. Tehdään sen kolmeen suurimpaan alkioon A-muutos, ja tehdään sen jälkeen B-muutoksia kullakin hetkellä suurimpiin alkioihin, kunnes taululla lukee vain numerot 1 ja 3. Otetaan näistä keskiarvo ja saadaan $c = 2$.

Tekemällä nyt peilikuva siitä argumentista, jolla saatiin $c = 2$, saadaan taululle jäämään $c = 2021$.

Oletetaan sitten, että haluttu c eli c' toteuttaa $4 \leq c' \leq 2019$. Tehdään ensin samoin kuin jätettäessä taululle 2, mutta pysäytetään muutosjono sen A- tai B-muutoksen jälkeen, kun taululla on suurin luku $c' + 2$ ja toiseki suurin c'. Näiden lisäksi taululla on kaikki lukua c' pienemmät luvut. Aletaan nyt tehdä muutoksia kuten pyrittäessä lukuun 2021, mutta stopataan muutokset siinä vaiheessa, kun taululla on pelkästään luvut $(c' - 2, c', c' + 2)$.

Nyt $c = c'$ saadaan muutoksilla $(c' - 2, c', c' + 2)$ muuttuu (c', c') muuttuu (c'). Siis $4 \leq c \leq 2019$ onnistuu.

Ylläkuvattuun tapaan päästään myös jonoon $(1, 2, 3, 4, 6)$. Tästä päästään jonoon $(1, 3, 4)$, josta päästään jonoon $(2, 4)$, josta päästään jonoon (3). Siis $c = 3$ on mahdollinen. Symmetrisellä argumentilla saaadaan $c = 2020$.

18. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Tutkitaan kaikkia äärettömiä, luonnollisilla luvuilla indeksöityjä luonnollisten lukujen jonoja (a_i), jotka eivät ole vakiojonoja, ja jotka toteuttavat rekursioyhtälön

$a_{i+1} = (k + 1)a_i - ka_{i-1}$.

Kutsutaan kaikkien tällaisten jonojen joukkoa G_k:ksi. Sanomme, että $(a_i) \in G_k$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin $(b_i) \in G_k$, jos $a_i \leq b_i$ kaikilla indekseillä i. Osoita, että G_k:ssa on pienin alkio, ts. alkio (a_i), jolle (a_i) on pienempi tai yhtäsuuri kuin (b_i) kaikilla $(b_i) \in G_k$.

18. tehtävän ratkaisu: Nyt

$$a_{i+1} - a_i = (k + 1)a_i - ka_{i-1} - a_i = k(a_i - a_{i-1}).$$

Soveltamalla edellämainittua iteratiivisesti saadaan

$$a_{i+1} - a_i = k^i(a_1 - a_0),$$

eli

$$a_{i+1} = a_i + k^i(a_1 - a_0).$$

Edellämainitusta seuraa, että a_0 ja a_1 määräävät jonon yksikäsitteisesti. Lisäksi $a_1 > a_0$, koska $a_1 = a_0$ johtaisi vakiojonoon ja $a_1 < a_0$ siihen, että jonossa on negatiivisia jäseniä.

Jos $a_0 \leq b_0$ ja $a_1 - a_0 \leq b_1 - b_0$, niin jono (a_i) on pienempi tai yhtä suuri kuin jono (b_i). Valinnalla $a_0 = 0$ saadaan pienin mahdollinen a_0, ja tämän jälkeen valinnalla $a_1 = 1$ saadaan pienin mahdollinen $a_1 - a_0$.

19. Olkoon S viiden tason pisteen joukko. Joukon S pisteistä mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että joukon S pisteistä voidaan valita neljä, jotka ovat konveksin nelikulmion kärjet.

19. tehtävän ratkaisu: On kolme vaihtoehtoa:

1. Joukon S pisteet ovat konveksin viisikulmion kärjet.
2. Neljä joukon S pisteistä ovat konveksin nelikulmion kärjet, ja viides piste on tämän nelikulmion sisällä.
3. Kolme joukon S pisteistä on konveksin kolmion kärjet, ja kaksi muuta pistettä ovat tämän kolmion sisällä.

Tapauksessa 2 tehtävä on jo ratkennut. Tapauksessa 1 voidaan viisikulmion kärjistä valita mitkä tahansa neljä, ja ne ovat konveksin nelikulmion kärjet. Jos viisikulmion kärjet ovat A, B, C, D, E, ja kärki E jätetään pois, nelikulmion kärkeä D vastaava kulma on pienempi kuin konveksin viisikulmion kärkeä D vastaava kulma, eli alle 180 astetta. Vastaavasti nelikulmion kärkeä A vastaava kulma on alle 180 astetta, joten nelikulmio on tosiaan konveksi.

Jäljellä on siis tapaus 3. Olkoon $S = \{A, B, C, D, E\}$, missä ABC ovat sellaisen kolmion kärjet, jonka sisällä D ja E ovat. Olkoon A' suoran AD ja sivun BC leikkauspiste, B' suoran BD ja sivun AC leikkauspiste ja C' suoran CD ja sivun AB leikkauspiste. Nyt janat AA', BB' ja CC' jakavat kolmion ABC kuuteen pikkukolmioon. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että E on näistä kuudesta pikkukolmiosta kolmion BDA' sisällä.

Nyt nelikulmio $BEDA$ on konveksi. Tämä nähdään seuraavasti: Nelikulmion kärkiä A ja E vastaavat kulmat ovat kolmioiden kulmia, joten ne ovat alle 180 astetta. Lisäksi nelikulmion kärkeä D vastaava kulma on pienempi kuin kulma ADA', joka on 180 astetta, eli nelikulmion kärkeä D vastaava kulma on alle 180 astetta. Ja vielä nelikulmion kärkeä B vastaava kulma on pienempi kuin kulma ABC, joka kolmion kulmana on alle 180 astetta. Siis $BEDA$ on konveksi.

20. Olkoon S äärellinen joukko tason pisteitä, $|S| \geq 3$ niin, että aina kun S:stä valitaan kolme pistettä, ne voidaan peittää ympyränmuotoisella kiekolla, jonka säde on 1.

Osoita, että koko S voidaan peittää ympyränmuotoisella kiekolla, jonka säde on 1.

20. tehtävän ratkaisu:

Olkoon T joukko pisteitä ympyrän Y kehällä. Sanomme, että joukko T toteuttaa kaariehdon, jos ei voida valita kaarta K, joka on osa, alle puolet, ympyrän Y kehästä, niin, että kaikki joukon T pisteet olisivat kaarella K.

Lemma: Olkoon T äärellinen joukko pisteitä ympyrän kehällä niin, että T toteuttaa kaariehdon.

Tällöin joukosta T voidaan valita kolme pistettä niin, että tämä kolmen pisteen joukko toteuttaa kaariehdon.

Todistus: Olkoon Y kyseinen ympyrä. Olkoot $a, b \in T$ pisteet, jotka ovat kauimpana toisistaan (Y:n kehää pitkin mitattuna). Jos a ja b ovat antipodaalipisteet, kolmanneksi pisteeksi voidaan valita mikä tahansa muu T:n piste, ja lemman todistus on valmis.

Oletetaan sitten, että a ja b eivät ole antipodaalipisteet. Olkoon a' pisteen a antipodaalipiste ja b' pisteen b antipodaalipiste. Nyt pisteiden a ja b' välissä ei voi olla joukon T pisteitä, koska nämä olisivat kauempana b:stä kuin a. Vastaavasti pisteiden b ja a' välissä ei voi olla joukon T pisteitä.

Kaikki joukon T pisteet eivät voi olla pisteiden a ja b välissä, koska tällöin T ei toteuttaisi kaariehtoa.

Siis on olemassa joukon T piste p, joka on pisteiden a' ja b' välissä (mahdollisesti sama kuin jompi kumpi näistä). Nyt joukko a, b, p toteuttaa kaariehdon. Lemman todistus valmis.

Olkoon nyt D ympyrä, jonka sisään kaikki joukon S pistet jäävät (osa pisteistä saa olla kehällä), ja joka on säteeltään pienin mahdollinen.[1]

Olkoon T niiden joukon S pisteiden joukko, jotka ovat ympyrän D kehällä.

Jos T ei toteuta kaariehtoa, ympyrää D voidaan siirtää hiukan joukkoa T kohti ja sen jälkeen pienentää hiukan D:n sädettä rikkoen D:n minimaalisuutta.

Siis T toteuttaa kaariehdon.

Jos T sisältää vain kaksi pistettä, nämä ovat antipodaalipisteet, ja D on pienin ympyrä jonka sisään nämä pisteet jäävät. Siis D:n säde on korkeintaan 1.

Jos taas T sisältää kolme tai enemmän pisteitä, T:stä voidaan valita kolme pistettä a, b, c, joiden joukko toteuttaa kaariehdon. Nyt D on pienin ympyrä, joka sisää nämä pisteet jäävät. Siis D:n säde on korkeintaan 1.

[1] Ympyrän D olemassaolo voidaan oikeuttaa geometrisellä intuitiolla, mutta tarkka (yliopistotason) perustelu ympyrän D olemassaololle on seuraava: Jos otetaan kaikkien niiden ympyröiden säteet, jotka peittävät joukon S, niin näiden säteiden joukolla on suurin alaraja r. Voidaan valita jono tällaisten ympyröiden säteitä $r_0, r_1, r_2, \dots$, joka lähenee rajatta r:ää. Olkoon $p_0, p_1, p_2, \dots$ vastaavien ympyröiden keskipisteet. Nyt on olemassa tämän keskipistejonon osajono $p_{i(0)}, p_{i(1)}, p_{i(2)}, \dots$ ($i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aidosti kasvava), joka lähenee rajatta jotain pistettä p. Nyt D:n keskipiste on p ja säde r.