Joulun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 15.1.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on ”liian pitkä intuitiohyppy” on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon $x > 0$. Olkoon y_0 sellaisen ympyrän kehän pituus, jonka halkaisija on x.

Olkoon A joukko ympyröitä niin, että niiden halkaisijoiden summa on x. Olkoon y_1 kyseisten ympyröiden kehien pituuksien summa.

Määritä $y_0 - y_1$.

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** $y_0 - y_1 = 0$.

Nyt $y_0 = \pi x$.

Olkoon joukon A ympyröiden halkaisijat $z_1, \ldots, z_n$. Nyt kyseisten ympyröiden kehien pituuksien summa on

$$y_1 = \pi z_1 + \cdots + \pi z_n = \pi(z_1 + \cdots + z_n).$$

Koska $z_1 + \cdots + z_n = x$, saadaan $y_1 = \pi x = y_0$.

2. Pöydällä on lappuja, joissa kussakin on jokin numero 1-100, täsmälleen kaksi lappua kutakin numeroa.

Kaksi pelaajaa pelaa peliä, jossakin kumpikin pelaaja ottaa vuorollaan lapun pöydältä.

Kun kumpikin on pelannut 20 vuoroa, peli loppuu. Kumpikin pelaaja saa pisteen jokaisesta ottamastaan lappuparista, joissa on sama numero. Se pelaaja voittaa, jolla on enemmän pisteitä. Jos kummallakin on sama määrä pisteitä, peli on tasapeli.

Osoita, että peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin, eli että kumpikin voi estää toista voittamasta.

2. tehtävän ratkaisu: Osoitetaan ensin, että toisena pelaava voi estää ensimmäisenä pelaavaa voittamasta, pelasipa ensimmäisenä pelaava kuinka tahansa.

Toisena pelaava voi pelata strategialla, jossa hän ottaa aina saman numeron kuin ensimmäisenä pelaava. Tällöin ensimmäisenä pelaava ei saa yhtään pistettä eikä hän näin ollen voita.

Osoitetaan sitten, että ensimmäisenä pelaava voi estää toisena pelaavaa voittamasta, pelasipa toisena pelaava kuinka tahansa.

Ensimmäisenä pelaava voi pelata seuraavalla strategialla: Hän ottaa ensimmäisenä siirtona minkä tahansa lapun. Jos toisena pelaava ottaa myöhemmillä siirroilla lapun, jossa on numero ℓ, ja pöytään jää lappu, jossa on myös numero ℓ, ensimmäisenä pelaava ottaa tämän lapun. Muussa tapauksessa ensimmäisenä pelaava voi tehdä minkä tahansa siirron. Jos ensimmäisenä pelaava pelaa näin, toisena pelaava ei saa yhtään pistettä eikä voi voittaa.

Koska kummallakin pelaajalla on strategia, jolla voi estää toista voittamasta, peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin.

3. Sama tehtävä kuin Tehtävä 2, paitsi, että jokaista numeroa on alussa neljä kappaletta. Pisteenlaskussa on vielä lisätarkennus, että kukin lappu voidaan laskea korkeintaan yhteen pisteitä antavaan pariin.

3. tehtävän ratkaisu: Koska kumpikin pelaaja ottaa 20 lappua, maksimipistemäärä on 10. Osoitetaan, että kumpikin pelaaja voi saavuttaa maksimipistemäärän vastustajan pelistrategiasta riippumatta.

Jos kaikki pelaajan aiemmin ottamat laput ovat pareissa, pelaaja ottaa lapun, jonka numeroisia on vähintään kolme jäljellä. Koska numeroita on 100 ja vuoroja 40, tällainen numero on välttämättä jäljellä. Huomaa, että tätä numeroa on vielä jäljellä pelaajan seuraavalla vuorolla, vaikka vastustaja ottaisikin seuraavalla vuorollaan tätä numeroa.

Jos taas pelaajalla on pariton lappu, hän ottaa sille parin. Pelaajan on aina mahdollista toimia näin, koska hän ottaa parittomia lappuja vain numerosta, jota on vähintään kolme jäljellä.

Näin pelaaja saa kaikki lappunsa pareihin ja maksimipistemäärän 10. Tällä strategialla pelaaja ei voi koskaan hävitä; tulos on väistämättä voitto tai tasapeli. Koska tämä koskee kumpaakin pelaajaa, peli on optimaalisella pelillä tasapeli.

4. Pelataan samaa peliä kuin Tehtävässä 2, paitsi, että peli loppuu vasta kun kaikki laput on otettu.

Osoita, että peli on nyt tasapeli riippumatta pelaajien pelistrategioista.

4. tehtävän ratkaisu: Lopussa kummallakin on 100 lappua. Olkoon p_1 ensimmäisenä pelaavan pareissa olevien lappujen lukumäärä, ja s_1 niiden hänen lappujensa lukumäärä, joiden parit on vastustajalla. Olkoon p_2 ja s_2 vastaavat luvut toisena pelaavalle.

Nyt $p_1 + s_1 = p_2 + s_2 = 100$. Lisäksi $s_1 = s_2$, koska tämä luku on niiden numeroiden lukumäärä, joista toinen lappu on ensimmäsenä pelaavalla ja toinen toisena pelaavalla.

Siis $p_1 = p_2$, ja kummallakin on lopussa $\frac{p_1}{2}$ pistettä.

5. Riikka ajaa kotoa mummolaan mopoautolla. Matkaa koostuu kolmesta erilaisesta tieosuudesta. Jokaisella näistä kolmesta tieosuudesta Riikka ajaa vakionopeudella (joka voi olla eri nopeus eri tieosuuksilla).

Kun Riikka on ajanut 30% matkasta, hän on käyttänyt alle 30% matkan kokonaisajasta. Kun Riikka on ajanut 50% matkasta, hän on käyttänyt yli 50% matkan kokonaisajasta.

Onko mahdollista, että kun Riikka on ajanut 70% matkasta, hän on käyttänyt alle 70% matkan kokonaisajasta?

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ei ole mahdollista.

Sanomme, että tie on nopea, jos 1 prosentissa ajasta pystyy ajamaan yli 1% matkasta ja hidas, jos 1 prosentissa ajasta pystyy ajamaan alle 1% matkasta.

Sanomme, että hetkellä k% matkasta ollaan edellä aikataulusta, jos on kulunut alle k% matkan kokonaisajasta ja sanomme, että ollaan jäljessä aikataulusta, jos on kulunut yli k% matkan kokonaisajasta.

Välillä 0% − 30% matkasta päästään edelle aikataulusta.Näin ollen kyseisellä välillä täytyy ainakin jossain kohti olla nopeaa tietä.

Kohdassa 30% ollaan edellä aikataulusta ja kohdassa 50% on jääty siitä jälkeen. Välillä 30% − 50% täytyy siis jossain kohdin olla hidasta tietä.

Kohdassa 50% ollaan jäljessä aikataulusta, mutta kun on ajettu 100% matkasta, aikaa on luonnollisesti kulunut 100%. Tämä tarkoittaa sitä, että välillä 50% − 100% matkasta täytyy olla jossain kohdin nopeaa tietä.

Näin ollen ainoa mahdollinen tieosuuksien järjestys on nopea-hidas-nopea. Lisäksi ensimmäinen vaihtuminen nopeasta tiestä hitaaksi on ennen kohtaa 50% matkasta.

Jos kohdalla 70% matkasta on hidasta tietä, sitä on ollut koko väli 50% − 70%, ja on vain jääty lisää jälkeen aikataulusta verrattuna 50% tilanteeseen.

Jos kohdalla 70% matkasta on nopeaa tietä, sitä on koko väli 70% − 100% matkasta. Koska lopussa ollaan täsmälleen aikataulussa, ei ole muuta vaihtoehtoa kuin se, että tällä välillä kurotaan jälkeenjäämistä umpeen. Näin ollen kohdassa 70% ollaan jäljessä aikataulusta.

6. Olkoon S säännöllinen 2000-kulmio. Osoita, että jos S:stä valitaan 1501 kärkeä ja piirretään monikulmio, jonka kärkiä nämä ovat, väistämättä syntyvässä 1501-kulmiossa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

6. tehtävän ratkaisu: Olkoon S:n kärjet $s_1, \ldots, s_{2000}$. Tutkitaan nelikkoja $\{s_{2i+1}, s_{2i+2}, s_{2i+1001}, s_{2i+1002}\}$, $0 \leq i \leq 499$. Nelikkoja on 500,ja jokainen S:n kärki kuuluu johonkin nelikkoon. Jos jokaisesta nelikosta valitaan korkeintaan 3 pistettä, pisteitä valitaan korkeintaan 1500.

Jos siis S:stä valitaan 1501 kärkeä, jollain i nelikko $\{s_{2i+1}, s_{2i+2}, s_{2i+1001}, s_{2i+1002}\}$ valitaan kokonaan. Mutta nyt sivut $s_{2i+1}s_{2i+2}$ ja $s_{2i+1001}s_{2i+1002}$ ovat yhdensuuntaisia.

7. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla i, $1012 \leq i \leq 2022$ löytyy n:n tekijä n_i (jonka ei ole pakko olla alkutekijä), jolle $n_i \equiv i \pmod{2023}$.

Osoita, että vastaava n_i löytyy kaikilla $1 \leq i \leq 2022$.

7. tehtävän ratkaisu: Tässä tehtävien laatija (=Tuomas) oli mokannut, ja tehtävä on ratkaisukelvoton. Syvät pahoitteluni. Eräänlaisen pseudoratkaisun saa aikaiseksi laskemalla luvun n tekijöiksi myös negatiiviset luvut k, joilla $k|n$. Tällöin voidaan valita $n_i = -n_{2023-i} \equiv 2023 - n_{2023-i} \pmod{2023}$

8. 101 viisasta miestä seisoo ringissä. Kullakin miehellä on toinen kahdesta mahdollisesta mielipiteestä: Joko että kuu on Emmentaalia, tai että kuu on Edamia.

Kaikki sanovat mielipiteensä ääneen. Tämän jälkeen kukin viisas mies vaihtaa mielipidettään, jos hän seisoo kahden sellaisen miehen välissä, jotka ovat eri mieltä kuin hän.

Edellisessä kappaleessa kuvattua operaatiota toistetaan. Osoita, että lopulta päästään tilanteeseen, jossa kukaan ei enää muuta mieltään.

8. tehtävän ratkaisu: Kutsutaan seuraavia miesjoukkoja blokeiksi:

1. Maksimaalinen (ja vähintään kahden alkion) joukko peräkkäisiä miehiä, jotka ovat samaa mieltä.
2. Maksimaalinen joukko peräkkäisiä miehiä niin että jokaisen joukkoon kuuluvan miehen vierustoverit ovat eri mieltä kuin hän itse.

Huomataan, että kullakin hetkellä jokainen mies kuuluu yhteen ja vain yhteen blokkiin. Lisäksi jokaisen tyypin 2 blokin kumminkin puolin on tyypin 1 blokit.

Lisäksi, koska miehiä on alussa pariton määrä, sellainen alkutilanne on mahdoton, että kaikki miehet kuuluisivat samaan tyypin 2 blokiin. Siis alkutilanteessa on vähintään yksi tyypin 1 blokki.

Kun miehet ilmaisevat mielipiteensä ja tapahtuu mielenmuutos, tyypin 1 blokkeihin kuuluvat miehet eivät muuta mieltään. Kaikki tyypin 2 blokkeihin kuuluvat miehet muuttavat mieltään, ja jokaisen tyypin 2 blokin reunimmaiset miehet siirtyvät viereisiin tyypin 1 blokkeihin.

Näin jokaisella askeleella tyypin 2 blokit pienenevät, kunnes ne hupenevat olemattomiin ja kaikki miehet kuuluvat tyypin 1 blokkeihin.

9. Ympyrän kehällä on 99 lukua. Jos a ja b ovat kaksi vierekkäistä lukua, yksi seuraavista pätee

- $|a-b|=1$.
- $|a-b|=2$.
- $\frac{a}{b}=2$ tai $\frac{b}{a}=2$.

Osoita, että ympyrän kehällä on luku, joka on kolmella jaollinen.

9. tehtävän ratkaisu: Nähdään, että mitkään kaksi vierekkäistä lukua eivät ole kongruentteja $\mod 3$. Jos siis yksikään luvuista ei ole kolmella jaollinen, joka toinen luku on $1 \mod 3$ ja joka toinen $2 \mod 3$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska lukuja on yhteensä pariton määrä.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon $\angle BAC$ kulma, ja ω kulman sisään piirretty ympyrä, joka tangeeraa kulman kylkiä pisteissä B ja C. Olkoon ℓ suora, joka leikkaa suoria AB ja AC pisteissä K ja L, sekä ympyrää ω pisteissä P ja Q. Pisteet S ja T ovat suoralla BC siten, että KS ja AC ovat yhdensuuntaisia ja TL ja AB ovat yhdensuuntaisia.

Olkoon R suorien PQ ja BC leikkauspiste.

Osoita, että pisteet P, Q, S, T sijaitsevat saman ympyrän kehällä.

10. tehtävän ratkaisu: Koska kolmiot KBS ja LTC ovat homoteettisia homotetiakeskusena R, $\frac{RS}{RB}=\frac{RC}{RT}$. Tästä seuraa $RB \cdot RC = RS \cdot RT$. Toisaalta, koska B, C, P, Q ovat saman ympyrän kehällä, $RP \cdot RQ = RB \cdot RC$.

Siis $RS \cdot RT = RP \cdot RQ$, ja siis S, T, P, Q ovat saman ympyrän kehällä.

11. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretään ympyrä Ω. Piirretään ympyrälle Ω tangentit pisteisiin B ja C. Olkoon P näiden leikkauspiste. Pisteet D ja E ovat suorilla AB ja AC niin, että PD ja PE ovat kohtisuorassa suoria AB ja AC vastaan.

Osoita, että kolmion ADE korkeusjanojen leikkauspiste on sivun BC keskipiste.

11. tehtävän ratkaisu: Olkoon M sivun BC keskipiste.

Koska $\angle ADP$ on suora kulma, kulma $\angle ADM = 90 - \angle MDP$.

Koska $\angle BDP$ ja $\angle BMP$ ovat suoria kulmia, $BDPM$ on jännenelikulmio, ja siis kulma $\angle MDP = \angle MBP$. Toisaalta kulma $\angle MBP = \angle CBP = \angle BAC$.

Kun kaikki nämä yhtälöt laitetaan yhteen, saadaan kulma $\angle ADM = 90 - \angle BAC$. Siis jana DM on kohtisuorassa suoraa AC vastaan. Jos siis kolmiolle ADE piirretään korkeusjana pisteeseen D, se jatkaa janaa DM.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että jos kolmiolle ADE piirretään korkeusjana pisteeseen E, se jatkaa janaa EM.

Siis M on kolmion ADE korkeusjanojen leikkauspiste.

12. Olkoon ω_1 ja ω_2 ympyröitä, keskipisteinään O_1 ja O_2. Oletetaan, että ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Piirretään ympyröille ω_2 ja ω_1 tangentit pisteeseen A. Nämä leikkaavat suorat O_1B ja O_2B pisteissä K ja L.

Osoita, että suorat KL ja O_1O_2 ovat yhdensuuntaisia.

12. tehtävän ratkaisu: Koska kulmat $\angle LAB$ ja $\angle AO_1O_2$ ovat yhtäsuuria, kulma $\angle LAB = \frac{1}{2}\angle AO_1B = 90 - \angle ABO_1 = 90 - \angle ABK$. Vastaavalla päättelyllä saadaan $\angle KAB = 90 - \angle ABL$.

Tästä saadaan $\angle LAK + \angle LBK = \angle LAB + \angle BAK + \angle LBA + + \angle ABK = 180$. Koska nelikulmio, jossa vastakkaisten kulmien summa on 180 on jännenelikulmio, $LAKB$ on jännenelikulmio.

Jännenelikulmiossa sivun ja diagonaalin välinen kulma on sama kuin vastakkaisen sivun ja toisen diagonaalin välinen kulma. Näin ollen kulmat $\angle BKL$ ja $\angle LAB$ ovat yhtä suuria. Edellä näytetyn nojalla $\angle BKL = \angle LAB = 90 - \angle ABK$.

Siis KL ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska AB ja O_1O_2 ovat myös kohtisuorassa toisiaan vastaan, KL ja O_1O_2 ovat yhdensuuntaisia.

13. Olkoon $a_1, \ldots, a_{11}$ luonnollisia lukuja, ja jotka ovat vähintään 2, ja joiden summa on 407. Olkoon n luonnollinen luku. Lasketaan yhteen jakojäännökset, kun n jaetaan luvuilla $a_1, \ldots, a_{11}, 4a_1, \ldots, 4a_{11}$.

Onko mahdollista, että kyseinen jakojäännosten summa on 2012?

13. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ei ole mahdollista.

Tehdään vastaoletus, kyseinen jakojäännösten summa on 2012.

Kun n jaetaan luvulla x_i, suurin mahdollinen jakojäännös on $x_i - 1$. Nyt

$$(x_1 - 1) + \ldots, (x_{11} - 1) + (4x_1 - 1) + \ldots, (4x_{11} - 1) = 2013.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki paitsi yksi seuraavista kongruenssiyhtälöistä pätee: $n \equiv -1 \mod x_i$, $n \equiv -1 \mod 4x_i$. Lisäksi se yksi poikkeuskongruenssi on -2.

Siis on olemassa i, jolle $n \equiv -1 \mod x_i$, $n \equiv -2 \mod 4x_i$ tai $n \equiv -2 \mod x_i$, $n \equiv -1 \mod 4x_i$.

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska kongruenssit $\mod x_i$ ja $\mod 4x_i$ eroavat x_i:n monikerralla.

14. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kutsutaan n:n päätekijöiksi kahta suurinta luvun n tekijää, jotka eroavat luvusta n.

Olkoon nyt a ja b positiivisia kokonaislukuja, joilla on samat päätekijät. Osoita, että $a = b$.

14. tehtävän ratkaisu: Olkoon p, q luvun n päätekijät, $p > q$. Merkitään $p' = \frac{n}{p}$ ja $q' = \frac{n}{q}$. Nyt p' on luvun n pienin alkutekijä, ja q' on joko luvun n toiseksi pienin alkutekijä, tai sitten $q' = {p'}^2$.

Olkoon nyt p, q lukujen a, b yhteiset päätekijät, $p > q$. Olkoon p'_a, q'_a, p'_b, q'_b kuten edellä.

Nyt $p = \frac{a}{p'_a} = \frac{b}{p'_b}$ ja $q = \frac{a}{q'_a} = \frac{b}{q'_b}$. Tästä saadaan $ap'_b = bp'_a$ ja $aq'_b = bq'_a$, mistä saadaan $p'_b q'_a = p'_a q'_b$. Jos nyt q'_a tai q'_b on alkuluku, $q'_a = q'_b$ ja $p'_a = p'_b$, ja tehtävä on ratkaistu.

Jatkossa siis voidaan olettaa $q'_a = {p'_a}^2$ ja $q'_b = {p'_b}^2$.

Mutta nyt $p'_b(p'_a)^2 = p'_a(p'_b)^2$, mistä saadaan $p'_a = p'_b$ ja $q'_a = q'_b$, eli todistus valmis.

15. Olkoon a, b, c, d positiivisia reaalilukuja, joille

$$2(a + b + c + d) \geq abcd.$$

Osoita, että

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd.$$

15. tehtävän ratkaisu: Oletetaan ensin, että $abcd \geq 16$.

Sovelletaan Cauchy-Schwarzia jonoihin (a, b, c, d) ja $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Saadaan

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4(\frac{a + b + c + d}{4})^2.$$

Toisaalta tehtävänannon oletuksen nojalla

$$4(\frac{a + b + c + d}{4})^2 \geq 4(\frac{abcd}{8})^2.$$

Oikea puoli on oletuksen $abcd \geq 16$ nojalla suurempi kuin $abcd$, ja tapaus valmis.

Oletetaan sitten, että $abcd \leq 16$.

Soveltamalla aritmeettis-geometristä epäyhtälöä jonoon (a^2, b^2, c^2, d^2) saadaan

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}.$$

Oikea puoli on oletuksen $abcd \leq 16$ nojalla vähintään $abcd$. Todistus valmis.

16. Olkoon a, b, c, d positiivisia kokonaislukuja, joille $c > b$. Oletetaan lisäksi $a + b + c + d = ab - cd$. Osoita, että $a + c$ ei ole alkuluku.

16. tehtävän ratkaisu: Koska $a+b+c+d>0$, myös $ab-cd>0$. Tästä seuraa $\frac{a}{d}>\frac{c}{b}>1$, eli $a>d$.

Lasketaan seuraavaksi $\mod a+c$:

$$b+d \equiv a+b+c+d \equiv ab-cd \equiv ab+ad-ad-cd \equiv ab+ad-(a+c)d \equiv ab+ad.$$

Siis $a+c|ab+ad-b-d=(a-1)(b+d)$.

Nyt $a+c$ ei jaa lukua $a-1$,koska $a+c>a-1$. Jos siis $a+c$ on alkuluku, $a+c|b+d$. Mutta tästä seuraa $b+d \geq a+c$, mutta tämä on ristiriita, koska $a>d$ ja $c>b$.

17. Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ astetta 10 olevia polynomeja niin, että kummankin kymmenennen asteen kerroin on 1. Lisäksi oletetaan, että yhtälöllä $P(x)=Q(x)$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

Osoita, että yhtälöllä $P(x-1)=Q(x+1)$ on reaalinen ratkaisu.

17. tehtävän ratkaisu: Olkoon $R(x)$ paritonasteinen polynomi. Tällöin $\lim_{x\to\infty} R(x)$ on plus tai miinus ääretön, samoin $\lim_{x\to-\infty} R(x)$ on plus tai miinus ääretön. Lisäksi $\lim_{x\to\infty} R(x) = -\lim_{x\to-\infty} R(x)$. Tästä seuraa, että $R(x)$:llä on nollakohta, koska sen kuvaaja ei voi hypätä nollan yli.

Koska tiedetään, että $P(x)-Q(x)$:llä ei ole nollakohtia, sen täytyy olla parillisasteinen polynomi. Koska P:n ja Q:n kummankin korkeimman asteen kerroin on 1, $P(x)-Q(x)$ on korkeintaan kahdeksanasteinen.

Siis $P(x)$:n ja $Q(x)$:n yhdeksännen asteen kerroin on sama, olkoon se r.

Kirjoittamalla polynomi $P(x-1)$ auki nähdään, että sen kymmenenen asteen kerroin on 1 ja yhdeksännen asteen kerroin on $r-10$. Kirjoittamalla polynomi $Q(x+1)$ auki nähdään, että se kymmenennen asteen kerroin on 1 ja yhdeksännen asteen kerroin on $r+10$.

Siis $P(x-1)-Q(x+1)$:n kymmenennen asteen kerroin on 0 ja yhdeksännen asteen kerroin on -20. Siis kyseinen polynomi on astetta 9, ja sillä on nollakohta.

18. Olkoon S konveksi n-kulmio, n pariton.

S:ään piirretään kärkiä yhdistäviä janoja, kuitenkin niin, että mikään jana ei yhdistä kahta vierekkäistä kärkeä.

Sanomme, että jana on hyvä, jos se leikkaa täsmälleen yhtä toista janaa S:n sisällä.

Mikä on suurin määrä hyviä janoja, joka monikulmiossa voi olla?

18. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Suurin mahdollinen määrä janoja on $n-3$.

$n-3$ janaan päästään seuraavasti. Olkoon k monikulmion kärki. Piirretään jana, joka yhdistää k:n viereiset kärjet, sekä janat, jotka yhdistävät k:n kaikkiin muihin kärkiin paitsi viereisiin.

Osoitetaan sitten, että $n-3$ hyvää janaa ei voida ylittää. Osoitetaan samaan syssyyn, että jos n on parillinen, $n-2$ janaa ei voida ylittää.

Osoitetaan ensin induktiolla, että jos n on pariton, voidaan piirtää korkeintaan $n-3$ janaa, jotka eivät leikkaa toisiaan. Kolmioon ei voida piirtää yhtään janaa, joten induktio lähtee käyntiin.

Oletetaan sitten, että m-kulmiossa, m pariton, on yli $m-3$ janaa, jotka eivät leikkaa toisiaan. Olkoon J sellainen jana, että kaikki muut janat ovat J:n samalla puolen (sanotaan vasemmalla). Tällöin J:n oikealla puolen olevat pisteet voidaan pyyhkiä pois, jolloin J:stä tulee monikulmion reunaviiva.

Jos pyyhimme pois parillisen määrän pisteitä, saamme pienemmän monikulmion, jossa on, sanokaamme m' kärkeä ($m'<m$), ja yli $m'-3$ toisiaan leikkaamatonta janaa. Ristiriita.

Jos taas pyyhimme pois parittoman määrän pisteitä, oletamme, että J:n päätepisteet ovat a ja b. Nyt joko a tai b on sellainen, että se ei ole muun janan kuin J:n päätepiste. Oletetaan symmetrian perusteella, että b on tällainen. Voimme pyyhkiä pois J:n ja b:n. Saamme samaan tapaan pienemmän monikulmion, joka johtaa ristiriitaan.

Samaan tapaan voidaan osoittaa, että m- kulmiossa, m parillinen, on korkeintaan $m-2$ janaa, jotka eivät leikkaa toisiaan.

Nyt siis tiedämme, että jos hyvät janat eivät leikkaa toisiaan, väite pätee.

Todistetaan induktiolla, että jos n on parillinen, voidaan piirtää korkeintaan $n-2$ hyvää janaa, ja jos n on pariton, voidaan piirtää korkeintaan $n-3$ hyvää janaa.

Olkoon n nyt parillinen tai pariton. Jos on kaksi toisensa leikkaavaa hyvää janaa AB ja CD, mitkään muut janat eivät voi leikata AB:tä ja CD:tä. Niinpä väleillä AC, CB, BD, DA olevat kärjet (päätepisteet mukaanluettuna) muodostavat monikulmiot, ja jokainen alkuperäiseen monikulmioon piirrety jana (paitsi AB ja CD) sisältyy johonkin näistä pienemmistä monikulmioista janana, joka ei yhdistä kahta peräkkäistä kärkeä. Jos nimittäin jokin janoista AB, BC, CA, AD on piirretty, se ei voi leikata mitään muuta janaa, ja se voidaan jättää huomiotta. Olkoon kärkien määrät väleillä $x_{AC}, x_{CB}, x_{BD}, x_{DA}$ päätepisteet mukaanluettuna.

Nyt $x_{AC} + x_{CB} + x_{BD} + x_{DA} = n + 4$.

Jos n on parillinen, hyvien janojen määrä on korkeintaan $2+(x_{AC}-2)+(x_{CB}-2)+(x_{BD}-2)+(x_{DA}-2) = n - 2$. Jos taas n on pariton, jokin luvuista x_i on vähintään 3, ja hyvien janojen määrä on korkeintaan $2 + (x_{AC} - 2) + (x_{CB} - 2) + (x_{BD} - 2) + (x_{DA} - 2) - 1 = n - 3$.