Uppgiftsseriepaket januari 2023

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 26.2.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. (a) Man åker på läger på måndagen och åker därifrån samma veckas söndag.
Hur många nätter är man på lägret?

(b) Banan består av tio rutor som finns uppradade efter varandra. En spelpjäs finns först på banans första ruta. Ett drag betyder att pjäsen förflyttas ett steg framåt längs med banan.

Hur många drag måste man göra för att pjäsen ska fås till den sista rutan på banan?

(c) Matematiktävlingsövaren börjar arbeta med uppgiftsseriepaketet den 20:e januari på morgonen, och hen arbetar med uppgifterna varje dag. Hen blir klar med uppgifterna på kvällen den 30:e januari.

Hur många dagar arbetar matematiktävlingsövaren med att lösa uppgifterna?

(d) Låt n vara ett positivt heltal. Hur många tal finns det i följden $0, 1, 2, \ldots, n-1$?

2. Låt a, b, c, d vara positiva reella tal, för vilka det gäller att $a > c$ och $d > b$. Visa att

$$\frac{a-b}{c+d} > \frac{c-d}{a+b}.$$

3. Det är känt att ekvationen

$$a^{10} + b^{10} = c^{10}$$

inte har lösningar när a, b, c är positiva heltal.

Visa genom att hålla det ovannämda som känt, att hela ekvationen inte heller har lösningar då a, b, c är positiva rationella tal.

4. Låt A vara en grupp med fem punkter i planet. Visa att det existerar en delmängd B till mängden A på så sätt att man kan förflytta mängden B i planet med en kombination av förflyttningar (translationer) och svängningar (rotationer) så att den uppkomna mängden (kombinationen av mängden A och förflyttade B) är symmetrisk med avseende till någon linje.

5. Låt $k_1, \ldots, k_n$ vara kartongbitar som är sinsemellan lika och har formen av rektanglar. Alla dessa beskärs så att de antar formen av en kvadrat, vars storlek kan bero av de valda kartonbitarna. Varje kartongbit skärs dock upp i kvadrater som sinsemellan är lika stora.

Sammanlagda antalet kvadrater man får på det här sättet är ett primtal.

Visa att kartongbitarna $k_1, \ldots, k_n$ har formen av en kvadrat.

6. Undersöker ekvationerna

$$(x-a)(x-b) = x-c$$
$$(x-b)(x-c) = x-a$$
$$(x-c)(x-a) = x-b,$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$ är konstanter. Visa att minst två av dessa ekvationer har lösningar.

7. Undersöker ekvationen

$$x^2 + ax + b = 0,$$

Där $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Antar att den har reella rötter x_1, x_2 där $x_2 \notin [-1, 1]$. Visa att $x_1 \in [-|b|, |b|]$.

8. Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en oändlig följd av positiva heltal och $p_1, p_2, \ldots$ en oändlig följd av primtal, där inget tal förekommer två gånger, och $p_i | a_i$ för varje i.

Vidare antar man att $a_{i+1} - a_i = p_{i+1} - p_i$ för alla i.

Visa att följden $a_1, a_2, \ldots$ betår av primtal.

9. Antar att

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1.$$

Visa att $x+y=0$.

10. Låt V vara ett riktat nät, med en ändlig mängd noder. Antar att följande gäller

1. Alla nodpar s, s' har en båge antingen från noden s till noden s' eller från noden s' till noden s. (Ur detta följer att valet $s = s'$ betyder att varje nod har en båge till sig själv.)

2. För alla tre noder s, s', s'' gäller följande: Om det från noden s går en båge till noden s' och från noden s' går en båge till noden s'', går det även en båge från noden s till noden s''.

Visa att det i nätet V finns en nod s, från vilken det går en båge till alla noder i nätet V.

Svårare uppgifter

11. De numrerade korten $1, 2, 3, 4, 5, 6$ blandas och delas jämnt ut mellan två spelare A och B, dessa är spelarnas handkort.

Stickspelet spelas på följande sätt: Spelaren som börjar lägger ner sitt valda kort på bordet med bildsidan uppåt. Därefter lägger följande spelare ner sitt valda kort på bordet med bildsidan uppåt. Spelaren som lagt ner det större kortet vinner sticket.

I spelet läggs alla handkort eftervarandra i stick. A börjar första sticket, och i följande stick börjar alltid den spelare som vann förra sticket. Den spelare som vunnit flera stick vinner spelet.

Visa att det existerar ett startläge för spelet (utdelade kort) så att båda följande krav gäller:

- B har en vinnande strategi

- A har ett ”smartkort”: Om hen börjar det första sticket med det kortet och B misslyckas med att vinna det sticket (med vilket som helst vinnande kort), så har A efter detta en vinnande strategi.

12. Har kort numrerade 1-100. Ett större kort slår det mindre, förutom att ettan vinner över hundra.

Korten ligger med bildsidan neråt på bordet. Vid bordet sitter det två personer: Informatören och mottagaren. Informatören vet vilket kort som är vilket.

Informatören ger följande information till mottagaren: Hen pekar på två av korten på bordet och berättar vilken som vinner vilket.

Visa att informatören kan med hundra valfria informeringar meddela mottagaren exakt vilket kort som är vilket.

13. Låt ABC vara en triangel, där vinkeln $\angle BAC$ är rät. Låt D vara sträckan AB:s medelpunkt, E är sträckan BC:s medelpunkt och F är sträckan AC:s medelpunkt. Genom punkterna D, E och F ritas en cirkel S.

Visa att S även går igenom punkten A och punkten G, som är skärningspunkten mellan sidan BC och triangelns höjd till sidan BC.

14. Låt V vara ett riktat nät, med en ändlig mängd noder. Antar att följande gäller.

1. Det finns inga noder s, s' så att det både från noden s går en båge till noden s' och från noden s' går en båge till noden s. (Genom att välja $s = s'$ får man resultatet att det inte från någon nod går en båge till sig själv.)

2. För alla tre noder s, s', s'' gäller följande: Om det från noden s går en båge till noden s' och från noden s' går en båge till noden s'', går det även en båge från noden s till noden s''.

Visa att det i nätet V finns en nod s, från vilken det inte går en båge till vilken som helst nod i nätet V.

15. Låt $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara en funktion för vilken följande gäller

- $f(nm) = f(n)f(m)$ för varje n, m.
- Om $n > m$ så är $f(n) > f(m)$.
- $f(3) \geq 7$.

Vad är det minsta värdet som $f(3)$ kan anta?

16. Antag $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{N}$. Visa att funktionen

$$x^2 + 2(a_1 + \ldots, a_5)^2 x + (a_1^4 + \cdots + a_5^4 + 1) = 0$$

inte har heltalslösningar.

17. Låt a, b, c vara längderna till någon triangels sidor, och låt $P(x)$ vara ett polynom av grad $n, n \geq 2$, vars alla koefficienter är positiva.

Visa att $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$, $\sqrt[n]{P(c)}$ är längderna av någon triangels sidor.

18. Vi säger att ett positivt heltal är ett långsjuetal ifall dess decimaltalframställning består av siffrorna $1, 2, \ldots, 7$ och varje siffra förekommer i decimaltalsframställningen exakt 10 gånger.

Visa att vilket som helst långsjuetal inte är delbart med ett annat långsjuetal.

19. Låt $P(n)$ vara ett polynom med heltalskoefficienter för vilken $P(P(n)+n)$ är ett primtal för ett oändligt antal heltal n.

Visa att $P(n)$ har gradtalet noll eller ett.

20. Låt p vara ett udda primtal. Vi säger att en följd $a_1, \ldots, a_p$ av naturliga tal är bra, om

- $a_i < p$.
- $a_1 + \cdots + a_p$ inte är delbart med talet p.
- $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ är delbart med talet p.

Bestäm antalet av alla bra följder.