Uppgiftsseriepaket för februari

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 9.4.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Definierar $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, för vilken $f(0) = 2$ och induktivt $f(n+1) = 2^{f(n)}$.

Bestäm det minsta n för vilken talet $f(n)$:s decimaltalsframställning har mera än 10000 siffror.

2. Låt r vara ett irrationellt tal och q_1, q_2 rationella tal, där $q_2 \neq 0$. Visa att även $q_1 + q_2 r$ och $q_1 + q_2 \frac{1}{r}$ är irrationella tal.

3. I ett visst land finns det en grupp med städer K. Mellan städerna går det enkelriktade flyglinjer (Om det från a till b går ett flyg kan det antingen gå ett flyg från b till a eller så går där inget flyg). Vi säger att staden b är nåbar från staden a om det är möjligt att flyga från a till b, även ifall att man byter flyg på vägen. (Vi säger även att varje stad är nåbar från sig själv.)

Om a och b är vilka städer som helst, finns det en stad c så att båda städerna a och b är nåbara från staden c.

Visa att det existerar en stad c_0, så att alla städer är nåbara från staden c_0.

4. Cirkarna S och T skär varandra i punkterna P och Q. Genom punkten P ritar vi linjerna s_1 och s_2. Linjen s_1 skär cirkeln S i punkten A_1 och cirkeln T i punkten B_1. Vidare finns punkten P på linjen s_1 mellan punkterna A_1 och B_1. Linjen s_2 skär cirkeln S i punkten A_2 och cirkeln T i punkten B_2. Vidare finns punkten P på linjen s_2 mellan punkterna A_2 och B_2.

Visa att trianglarna A_1B_1Q och A_2B_2Q är likformiga.

5. Bevisa att diagonalerna i en parallellogram delar in parallellogrammen i fyra delar som till sina areor är lika stora.

6. Låt ABC vara en likbent triangel, där AB är basen. Från sträckan AB väljer man punkten P och från P ritar man in normalerna N_A och N_B till sidorna AC och BC.

Visa att längden $|PN_A| + |PN_B|$ inte beror av valet på P. $|\cdot|$ betecknar sträckans längd.

7. (a) Är det möjligt att från planet välja 10 röda, 10 blåa och 10 gula punkter så att följande gäller:

- Av denna grupp på 30 punkter är det inte möjligt att välja två punktpar så avstånden mellan punkterna i båda paren är samma.
- Varje röda punkts närmaste grannpunkt (ur gruppen på 30 punkter) är blå.
- Varje blåa punkts närmaste grannpunkt (ur gruppen på 30 punkter) är gul.
- Varje gula punkts närmaste grannpunkt (ur gruppen på 30 punkter) är röd.

(b) Skulle det vara möjligt om man från (a) lämnar bort det första kravet, samt att man i de andra kraven inte skulle kräva att enbart den närmaste punkten har den efterfrågade färgen, utan även godkänna fallet då en punkt har flera närmaste punkter och minst en av dem har den efterfrågade färgen.

8. Visa att varje tvåsiffrigt tal som är delbart med summan av sina siffror även är delbart med talet 10 eller talet 3.

9. På tavlan finns det n positiva heltal $n > 2$, där varje tal är mindre än $(n-1)!$. Paula bildar för varje par (a, b) en kvot a/b, där det större är delat med det mindre och avrundat neråt till det närmaste heltalet.

Visa att det i gruppen av kvoter finns två som sinsemellan är lika stora.

Svårare uppgifter

10. 20 vänner går samtidigt till kassan i matbutik. De har olika många saker de tänker köpa, alltså kommer det att räcka olika länge för dem vid kassan. (Vi antar att tiden vid kassan enbart är beroende på antalet saker de köper.)

Vännerna bestämmer sig för att gå till kassan i en sådan ordning att summan av alla personers väntetid är så liten som möjligt. Visa att den minsta summan fås genom att den personen som har färst saker går först till kassan, sedan den som har nästfärst saker, sedan den med tredjefärst osv.

11. Låt ABC en rätvinklig triangel, där vinkeln ABC är rät. Vi ritar en cirkel S som löper genom triangelns sidors medelpunkter. Visa att även punkten B och baspunkten D som skapas av höjdsträckan som ritas emot hypotenusan, finns på cirkeln S.

12. Visa att det existerar ett irrationellt tal r som uppfyller följande krav:

- r^n är irrationell för alla positiva heltal n.
- Det existerar positva heltal n, m för vilka $r^n + r^m$ är rationella tal.

13. I ett $2n + 1 \times 2n + 1$ stort rutsystem färgar man en del av rutorna röda och resten blåa. Vi säger att i rutsystemet är en rad röd, om det på raden finns flera röda än blåa rutor. Vi säger att en kolumn är blå ifall det finns flera blåa än röda rutor i den.

Låt P vara antalet röda rader, och S antalet blåa kolumner. Vad är det största möjliga värdet på $S + P$.

14. Låt P, Q vara polynom vars koefficienter är naturliga tal (noll är ett naturligt tal), och det existerar positiva heltal $a \neq b$, för vilka $P(a) = Q(a)$ och $P(b) = Q(b)$. Antar att alla koefficienter i P är mindre än b. Visa att $P = Q$.

15. Låt n_0 vara ett positvt heltal. Definierar en oändlig talföljd $n_0, n_1, n_2, \ldots$ på följande sätt: Om n_i är delbar med fem, $n_{i+1} = \frac{n_i}{5}$ (a-steg). Annars $n_{i+1} = \lfloor x\sqrt{5} \rfloor$ (b-steg).

Visa att det i följden enbart finns ett ändligt antal a-steg.

16. Låt $n_1, \ldots, n_{2000}$ vara en följd med heltal så att varje $-1000 \leq n_i \leq 1000$, och $\sum n_i = 1$.

Visa att det existerar en icketom $I \subset \{0, 1, \ldots, 2000\}$, för vilken $\sum_{i \in I} n_i = 0$.

17. Visa att det för gruppen ekvationer

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

inte finns lösningar som är positiva reella tal.

18. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ vara icke-negativa reella tal, för vilka $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{100}$.

Följande gäller:

- $x_1 + x_2 \leq 100$.
- $x_3 + \cdots + x_{100} \leq 100$.

Bestäm det största värdet för summan $x_1^2 + \cdots + x_{100}^2$.