Uppgiftsseriepaket för april

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 28.5.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Summan av siffrorna i ett tvåsiffrigt tal n är 13. När man subtraherar 27 från talet innehåller svaret samma siffror men i motsatt ordning.

Bestäm n.

2. När ett plan delas in i rutor som ett rutigt papper, så säger vi att det är täckt av kvadrater. På motsvarande sätt kan man även täcka planet med liksidiga trianglar eller regelbundna sexhörningar. (Med andra ord, varje punkt i planet är en inre punkt till exakt en månghörning, en randpunkt på exakt två månghörningars sidor eller en hörnpunkt till flera månghörningar.)

Visa att man inte kan täcka planet på motsvarande sätt med några andra regelbundna månghörningar än de som nämns ovan.

3. De positiva reella talen a, b, c, d uppfyller $a + b + c + d \leq 40$. Bestäm den största möjliga värdet för produkten $abcd$.

4. Låt S vara en cirkel, O dess medelpunkt och P en punkt utanför cirkeln. Vi ritar tangenter till cirkeln S från punkten P och från punkten O linjer som är parallella med tangenterna. Låt punkterna A och B vara skärningspunkterna mellan tangenterna och de inritade linjerna.

Visa att fyrhörningen $OAPB$ är en romb.

5. För mängden $S = \{-1, -2, \ldots, -2023\}$ alla icke-tomma delmängder A skapas av A:s element produkten $\prod A$.

Vad är summan av alla produkter $\prod A$?

6. Låt a och b vara femmans potenser, $a \neq b$. Deras decimaltalsframställning skrivs efter varandra och man får då talet c.

Visa att c inte är femmans potens.

7. Parallelltrapetset $ABCD$:s sidor AB och CD är parallella. Låt O vara diagonalernas skärningspunkt. Visa att trianglarna ADO och BCO har samma area.

8. De naturliga talen skrivs i form av en oändlig triangel som nedan

1			
2	3		
4	5	6	
7	8	9	10
...			

Vad är summan av talen på rad n?

9. Låt $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktioner som uppfyller $f(x + g(y)) = 2x + y$ för varje $x, y \in \mathbb{R}$.

Bestäm $g(x + f(y))$.

10. I en triangel finns det två medianer som är lika långa. Visa att triangeln är likbent.

Svårare uppgifter

11. Låt x, y, z vara positiva reella tal, för vilka det gäller att $xy + yz + zx = 27$

Visa att

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

12. Låt p vara ett naturligt tal. Antar att talen $p, 3p + 2, 7p + 6, 9p + 8, 11p + 10$ är primtal.

Visa att $6p + 11$ är ett sammansatt tal.

13. På en cirkels rand har man skrivit n reella tal, alla inom intervallet $[0,1]$. Dessutom är varje tal absolutbeloppet av differensen av de två tal som kommer före på cirkeln om man går runt cirkeln medurs.

Låt n vara givet. Bestäm det största möjliga värdet för summan av talen på cirkelns rand.

14. Visa att det existerar oändligt många naturliga tal n för vilka n och $n+(n+1)$ inte är kvadrattal, men $n+(n+1)+(n+2)$ är ett kvadrattal.

15. Undersöker bråktalet

$$\frac{\square+\square+\cdots+\square}{\square+\square+\cdots+\square+\square},$$

Där det på övre våningen finns 1010 tomma platser och på nedre våningen 1011. Två spelare, A och B spelar ett spel, där båda i tur och ordning placerar något av talen $1,2,\ldots,2021$ i någon tom plats. Varje tal och plats får användas enbart en gång.

A börjar. A vinner spelet om bråket som fås i slutet av spelet skiljer sig från en etta med högst 10^{-6}. Annars vinner B.

Vem av spelarna har en vinnande strategi?

16. Ava och Bea spelar följande spel: På en tavla finns det 17 naturliga tal, av vilka ingen är delbar med talet 17. Ava börjar.

På sin tur

- väljer Ava något tal a på tavlan och ersätter det med talet a^2.
- väljer Bea något tal b på tavlan och ersätter det med talet b^3.

Ava vinner om det efter ett ändligt antal drag är möjligt att dela talens summa med 17. Bea vinner om spelet fortsätter i all oändlighet.

Visa att Ava har en vinststrategi.

17. Vi säger att trion positiva heltal a,b,c är n-duglig om $a+b+c|a^n+b^n+c^n$.

Existerar det en trio a,b,c som är 2020-duglig och 2021-duglig men inte 2023-duglig?

18. Låt a,b,c vara positiva reella tal för vilka det gäller $a+b+c=1$. Visa att

$$\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{3b+1}+\frac{c}{6c+1}\leq\frac{1}{2}.$$

19. Leta efter alla tal $k,\ell\in\mathbb{R}$, för vilka

$$ka^2+\ell b^2>c^2$$

gäller för alla trianglar med sidolängderna a,b,c.