Sommarens roliga uppgiftsseriepaket

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 31.8.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \dots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Spelplanen består av 15 rutor i rad. 2 spelare spelar spelet och vardera har en egen spelpjäs. I början är spelpjäserna på spelplanens första ruta, och vinnaren är den som först får sin spelpjäs flyttad till planens sista ruta.

På sin tur flyttar spelaren sin pjäs ett steg framåt på planen.

Vardera spelare har två bonusar. Med bonusen kan pjäsen flyttas framåt två steg istället för ett, men vardera bonusen får användas enbart en gång under spelets gång.

Vardera spelare har även en superbonus, med vilken spelare får flytta pjäsen framåt tre steg istället för ett på sin tur, men superbonusen får användas enbart en gång under spelets gång.

Visa att spelaren som börjar har en vinnande strategi.

2. Magikern Ananasstjärna ger följande instruktioner åt Anna: ”Tänk på något naturligt tal. Multiplicera talet med två och addera sedan tre till talet. Multiplicera ännu talet med två och addera två till talet. Multiplicera ännu talet med två och subtrahera fem från det. Dela ännu talet med åtta och kom ihåg divisionsresten.”

Anna följer instruktionerna och efter det här kan Ananansstjärna berätta för Anna vilket tal som Anna fick som divisionsrest. Hur är det här möjligt?

3. Varje cell i en 3×3 -tabell innehåller till en början talet 0. Man kan utföra följande operationer på tabellen:

- Till varje cell i någon av tabellens rader adderar man talet 1.
- Från varje cell i någon av tabellens kolumner subtraherar man talet 1.
- Varje tal i varje cell i någon av tabellens rader flyttas en cell till höger (och talet längst till höger i raden flyttas till cellen längst till vänster i raden).
- Varje tal i varje cell i någon av tabellens kolumner flyttas en cell neråt (och talet längst ner flyttas till cellen högst upp i kolumnen).

Är det möjligt att med dessa operationer komma till en sådan tabell där det övre vänstra hörnet och nedre högra hörnet har talet 1 i sig och alla andra celler har nollor?

4. Raderna nedan avser vågräta rader och kolumnerna lodräta rader.

Magikerna Ananasstjärna delar ut 27 spelkort med bildsidan uppåt i nio rader som alla har tre kort i sig, raderna är ovanför varandra på så sätt att de bildar nio kolumner. Magikern ber sedan Anna tänka på något tal och berätta vilken kolumn kortet är i.

Ananasstjärna samlar ihop korten till en hög, en kolumn åt gången uppifrån ner, Annas utpekade kolumn blir den i mitten.

Ananasstjärna delar ut korten ett i taget till rader från vänster till höger i nio trekorts rader.

Ananasstjärna ber igen Anna visa vilken kolumn som kortet hen valde i början finns i, och Ananasstjärna upprepar igen kortens insamling och utdelning på samma sätt som ovan.

Sedan ber Ananasstjärna igen Anna visa i vilken kolumn som kortet hen valde i början finns i.

Nu kan Ananasstjärna peka ut vilket kort som Anna valde i början. Hur är det här möjligt? (Med andra ord, varför lyckas alltid tricket på det sätt som är beskrivet ovanför.)

5. Jag gör ett trolleritrick för dig. Tänk att du är i rutan A i tabellen nedan, och flytta dig själv 5 steg. Ett steg betyder att du flyttar dig till en ruta som har en gemensam sida med den rutan du just befann dig i. Du kan fritt välja riktning, även gå tillbaka.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Jag vet att du inte finns i någon av rutorna C, G, eller I, så dessa kan vi ta bort. Vi ordnar om rutorna

D	A	B	X
X	F	E	H

Fortsätt nu från samma bokstav som du befann dig på i den föregående tabellen, och flytta dig i tabellen ovan 7 steg. Flytta dig inte till rutorna som har X i sig, eftersom där finns det bomber.

Jag vet att du inte är i någon av rutorna D, eller H, så dessa kan vi ta bort. Tabellen ser nu ut såhär.

A	B
F	E

Fortsätt från samma bokstav som du just stod på och flytta dig tre steg i tabellen som finns ovanför.

Jag vet att du inte finns i rutan A, så vi tar bort den. Organiserar om rutorna

B	E	F

Fortsätt nu från samma bokstav som du nyss stod på och flytta dig 1 steg i tabellen ovan.

Simsalabim, jag vet att du är i rutan E.

Uppgift: Förklara varför tricket ovan alltid fungerar.

6. Anna och Berta spelar som lag i ett spel emot Carl. Berta lämnar rummet och Carl delar 100 objekt i två högar, en röd och en blå hög (enadera högen får även förbli tom). Den röda högen är ovanpå en röd filt och den blåa högen är på en blå filt; alla objekt är sinsemellan likadana.

Därefter tar Anna bort ett objekt från någondera av högarna. Sedan får Carl ännu ordna om högarna, men Carl får inte i det här skedet flytta ett objekt från en hög till en annan.

Berta kommer in i rummet och försöker gissa från vilken hög Anna tog bort ett objekt. Anna och Berta vinner om Berta gissar rätt. Annars vinner Carl.

Visa att Anna och Berta inte kan konstruera ett system så att de garanterat vinner.

7. Anna och Berta spelar som lag i ett spel emot Carl. Berta lämnar rummet.

På en vägg i rummet finns en rund skiva som man kan snurra på. Carl markerar ut 20 punkter på skivans rand. Därefter tar Anna bort markeringen från en av Carls punkter. Härefter får ännu Carl rotera på skivan.

Berta kommer in i rummet och försöker gissa mellan vilka två punkter som Anna tog bort markeringen. Anna och Berta vinner om Berta gissar rätt, annars vinner Carl.

Visa att Anna och Berta kan konstruera ett system så att de garanterat vinner.

8. I en 20×20 -tabell är kolumnerna numrerade från vänster till höger och uppifrån ner. Ur tabellen har man valt celler. Om r är en vald cell så finns den inte en annan vald cell för vilken både dess radnummer är samma eller större samt dess kolumnnummer är samma eller större.

Vad är det största möjliga antal celler man kan välja?

9. Vi antar att vi har n kulor, $n \geq 4$. Inga två kulor har samma vikt, och inga två kulpar har samma ihopräknade vikt.

Till förfogande har en jämviktsvåg, som har två vågskålar, och den skålen dras ner som har den större vikten i sig. Med att väga avser vi en operation där man i vardera vågskål placerar exakt två kulor, och vågen berättar vilken av vågskålarna som har den tyngre lasten.

Visa att man med tillräckligt många, lämpligt valda vägningar lyckas hitta antingen den lättaste eller tyngsta kulan.

Svårare uppgifter

10. Postiljonen har 101 paket, vars vikter är $1, 2, \ldots, 101$. Kan postiljonen dela dessa i tre högar som alla har samma totalvikt?

11. En $n \times n$-tabell täcks av T-tetrominoer, alltså med en form som X:en nedan bildar

X X X
  X

Bitarna får roteras. För vilka värden på n kan man täcka hela tabellen?

12. Martha vill skapa en kortlek som uppfyller följande vilkor:

1. Varje kort har ett tal på sig, det finns fem olika tal att välja mellan
2. Varje tal av de fem möjliga finns på minst ett av korten
3. När Martha tar vilka som helst två kort ur kortleken och räknar ihop deras tal, så kan man från kortleken hitta två andra kort vars summa är den samma.

Vad är den minsta mängden kort som Martha behöver för att kunna göra en sådanhärn kortlek?

13. n spelare, $n \geq 2$ deltar i ett bordsspel. När spelet är slut får vinnaren n poäng som skrivs ner i poänghäftet, spelaren som kom på andra plats får $n-1$ poäng osv.

Samma grupp upprepar detta så att de totalt spelar k stycken spel. När varje spelares poäng räknas ihop noterar man att alla spelare har totalt 26 poäng.

För vilka (n, k) par är det här möjligt?

14. På ett oändligt rutpapper finns det spelpjäser i varje ruta i en 10×10-kvadrat, en pjäs per ruta. Vi kallar pjäserna för grannar ifall deras rutor har en gemensam sida.

Pjäserna ordnas på nytt så att det inte finns mer än en pjäs per ruta, samt så att pjäserna är grannar efter flytten ifall de var grannar innan flytten. Dessutom är formen som fås efter flytten en fylld form som inte har hål innuti sig.

Visa att pjäserna även efter flytten fyller en 10×10-kvadrat.

15. Aatu och Beetu spelar följande spel: Först placerar Aatu 46 spelpjäser i någon ruta i ett 9×9-rutsystem, så att det finns högst en pjäs per ruta.

Sedan försöker Beetu hitta från rutsystemet ett 2×2-område, där det finns minst 3 speljäser. Beetu vinner om hen lyckas. Annars vinner Aatu.

Visa att det är Beetu som har den vinnandestrategin.

16. 2000 personer står på rad. Varje person är antingen en lögnare, som alltid ljuger, eller en ärlig person, någon som alltid talar sanning.

Alla personerna säger samtidigt: ”Det finns flera lögnare till vänster om mig än det finns ärliga personer till höger om mig.”

Är det möjligt att med hjälp av informationen ovan avgöra hur många lögnare och hur många ärliga personer det finns i raden?

17. Emilia är och skriver Jurkas inträdesprov till konstskolan. Juka ger ett naturligt tal n och följande uppgift åt Emilia:

Emilia måste rita en sträcka, vars längd är 1, sedan en sträcka vars längd är 2, och sedan en sträcka vars längd är 3 osv. hela vägen till önskad längd. Emilia får inte lyfta på pennan, alltså sträckan $k+1$ måste börja där som sträckan k tog slut. Sträckorna får skära varandra och till och med löpa ovanpå varandra.

Emilia antas till skolan om de sträckor som hen ritat bildar exakt, utan något överflödigt, sidorna till en sådan kvadrat vars sidor är minst av längden n.

Är det möjligt för Emilia att komma in i skolan oberoende av n:s värde?

18. På bordet ligger det 405 kort med bildsidan neråt, korten har talen $1, 2, \ldots, 405$ på sig.

Ett orakel och en arrangör spelar ett spel. Oraklet känner till kortens tal, arrangören gör inte det.

Arrangören utför följande operation: Arrangören väljer tre kort, och oraklet berättar vilket av dessa kort som har det största talet, och vilket som har det minsta.

Är det möjligt för arrangören att avgöra vilket tal det finns på alla kort om arrangören max får göra 2000 operationer?