Uppgiftsseriepaket för oktober

Även de enklaste uppgifterna är svårare än skoluppgifter, och man bör inte anta att de ska gå att lösa utan ansträngning. *Det lönar sig att kämpa på när man arbetar med uppgifterna.* Även om man inte skulle få hela uppgiften löst, så lär man sig mera av modellösningarna om man först funderat länge på uppgiften. Även i de enklare uppgifterna är det bra att skriva ut motiveringar och inte bara beräkna slutresultatet med t.ex. en räknare. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

Vi är mycket medvetna om att det på nätet finns många platser där man kan hitta lösningar; `https://aops.com` och `https://math.stackexchange.com` är troligen de mest kända. Användande av dessa är inte till skada, och man kan även lära sig mycket av dem, men vi rekommenderar att man först försöker lösa uppgifterna själv. Man kan även lära sig mycket av att fundera på uppgifterna tillsammans med andra personer som arbetar med uppgifterna, ifall att möjlighet till det erbjuds.

Ibland slinker det med fel i uppgifterna. Upptäckta fel kan meddelas på handledarnas sida

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Lösningar önskas senast den 26.11.2023 per epost.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Uppmärksamma meddelandet om dataskyddet:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

OBS! Från och med nu börjar vi även uppmärksamma hur den lösningen är skriven, och till er ges negativ feedback även för det att svaren är otydligt skrivna.

Vi observerar bland annat följande saker:

- Varje steg i resonemang måste motiveras med en förnuftig noggrannhet, man får inte göra alltför långa intuitionshopp. Det som dock är ”för långa intuitionshopp”är svårt att definiera. Följande exempel har ett intuitionshopp som är för långt:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Alltså existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

  Det skulle vara bättre att skriva:

  > Nu är $x_1, \ldots, x_{40}$ en följd av kanter i en regelbunden 20-sidig polyeder P. Eftersom en regelbunden 20-sidig kropp enbart har 30 kanter, existerar det $1 \leq i < j \leq 40$, för vilka $x_i = x_j$.

- Korrekt matematisk text består av hela meningar, och även formler är en del av meningarna. Du hittar exempel av denna stil exempelvis i den senaste tidens exempelsvar. Det lönar sig att eftersträva den här stilen. Eftersom ni inte ännu är universitets-studerande, godkänner jag även svar av er där t.ex. en rad ekvationer kopplats samman enabrt med ekvivalenspilar, om uppgiften möjliggör denna sorts lösningar.

- Om du är osäker över läsbarheten i din skrivstil, skriv då svaren med dator.

Bra matematisk text lär man sig tillverka enbart genom att öva. När du i tävlingssituationer skriver dina svar tydligt, kan du vara säker på att du i alla fall inte förlorar poäng på grund av att domarna inte förstått dina fina idéer.

Enklare uppgifter

1. Rulltrapporna rör sig uppåt ett steg på två sekunder. Janne står i mitten av rulltrappan. Janne rör sig ett steg i sekunden. Först ett steg uppåt, sedan två neråt, sedan ett uppåt, sedan två neråt osv.

Rör sig Janne uppåt eller neråt?

2. Låt A vara mängden av de punkter i planet vars båda koordinater är heltal. I den här uppgiften undersöker vi planets uppdelning i fyrhörningar som uppfyller följande villkor

- Alla fyrhörningars alla hörn är punkter i mängden A, och varje punkt i mängden A är hörn till åtminstone en fyrhörning.
- Varje punkt i planet är antingen exakt en fyrhörnings inre punkt, exakt två fyrhörningars gemensamma randpunkt, eller flera fyrhörningars hörn.

En indelning av planet i kvadratiska rutor på samma sätt som rutpapper, där rutans sidlängd är 1, är tydligt en uppdelning av planet i fyrhörningar som uppfyller kraven ovan. Ge ett exempel på en annan uppdelning av planet i fyrhörningar som uppfyller kraven ovan.

3. Vi har en vanlig kubformad tärning, vars sidor är numrerade 1-6, varje tal används en gång. Vi kallar dessa tal för ögontal. Sidorna 1 och 6 är motstående till varandra, på samma sätt är sidorna 2 och 5 motstående och sidorna 3 och 4 är motstående.

Från tärningen väljer man sidan t, och räknar ihop ögontalen från alla de sidor som har en gemensam kant med sidan t, dock räknas inte sidan t:s egna ögontal med i den här summan. Vilka alla möjliga värden kan den beskrivna summan anta?

4. Lös följande ekvationssystem i mängden för de reella talen.

$$x^2 + y^2 = 10(x + y)$$
$$x^2 - y^2 = 2(x - y)$$

5. Låt $n > 1$ vara ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < 1$$

6. Låt en triangel ha sidorna a, b, c, vi använder samma bokstäver även för sidornas längder. Medianerna som ritas för sidorna a och b står vinkelrätt emot varandra.

Visa att $a^2 + b^2 = 5c^2$.

7. Låt $x_1, \ldots, x_{101}$ vara sinsemellan olika stora reella tal. Vi bildar summorna $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_4$, $\ldots$, $x_{101} + x_1$.

Vad är den minsta möjliga mängden olika tal som kan förekomma bland med dessa summor?

8. Tre ballerina figurer snurrar på sina piedestaler. Den första gör tre varv på 30 sekunder, den andra på 50 sekunder och den tredje på 70 sekunder. Vid stunden 0 vetter allas ansikten norrut.

Vad är det första tillfället när alla deras ansikten vetter söderut?

9. Hitta alla lösningar till följande ekvationer när a, b, c är positiva heltal.

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Svårare uppgifter

10. Bestäm alla polynom P med reella koefficienter som uppfyller ekvationen

$$P(x + P(x)) = x^2 P(x)$$

för alla reella tal x.

11. Rymdfarkostens besättning består av n astronauter. Astronauterna anklagar varandra för att vara cyloner, dock på så sätt att följande gäller:

- Alla gör olika många anklagelser.
- Alla får olika många anklagelser riktade mot sig.
- Ingen anklagar sig själv.

Visa att det inte finns två astronauter som anklagar varandra.

12. Låt a, b vara positiva heltal för vilka $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$.
Visa att $\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}$.

13. Lös följande ekvationssystem i mängden för heltal.

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 1 \\ z^2 = xy + 1 \end{cases}$$

14. Låt a, b vara rationella tal, för vilka $a + b$ och $a^2 + b^2$ är heltal. Visa att a, b är heltal.

15. I klassen finns det 37 elever. Läraren ger 36 färgkritor till varje elev på så sätt att följande villkor uppfylls:

- Ingen får två färgkritor med samma färg.
- Om A och B är två helt valfria elever, så har A och B exakt en krita var som är samma färg.

Vad är den minsta mängden olika färger som läraren behöver ha till sitt förfogande?

16. Låt n vara ett naturligt tal. Spelbrädet består av 40 numrerade punkter som är jämnt utplacerade på randen av en cirkel. Anne och Bertta spelar följande spel. Till först placerar Anne en spelpjäs på någon av spelplanens punkter.

Bertta ser inte spelplanen, men under sin tur meddelar Bertta fyra av spelplanens punkter, och om spelpjäsen är på någon av dessa så vinner Bertta.

Under sin tur antingen flyttar Anne spelpjäsen ett steg i valfri riktning eller låter pjäsen stå på ställe.

Anne vinner om inte Bertta vinner på n rundor.

Bestäm det minsta n för vilken Bertta har en vinststrategi.

17. Låt $\frac{a}{600}$ och $\frac{b}{700}$ vara positiva bråktal i sin förenklade form.
Om talet $\frac{a}{600} + \frac{b}{700}$ skrivs i sin förkortade form, vad är det minsta möjliga talet i nämnaren?

18. 128 människor sitter i rad längs med ett långt bord. Typen längst till vänster har 128 papper i en hög. Klockan ringer med en minuts mellanrum. När klockan ringer kan varje människa, om hen vill, göra en av följande operationer

- Dela sin egen pappershög i två lika stora högar.
- Flytta en av sina egna högar till någon av sina grannar.

Människorna försöker dela på pappren så att alla i slutet har ett papper. Minst hur länge tar det här?