Tammikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 26.2.2023 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on ”liian pitkä intuitiohyppy” on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \le i < j \le 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \le i < j \le 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. (a) Leirille mennään maanantaina ja sieltä lähdetään pois saman viikon sunnuntaina.
Kuinka monta yötä leirillä ollaan?

(b) Rata koostuu kymmenestä peräkkäisestä ruudusta. Pelinappula on alussa radan ensimmäisessä ruudussa. Siirto tarkoittaa sitä, että nappulaa siirretään radalla yksi ruutu eteenpäin.

Kuinka monta siirtoa pitää tehdä, että nappula saataisiin radan viimeiseen ruutuun?

(c) Matematiikkakilpailuvalmennettava aloittaa tehtäväsarjan ratkaisemisen tammikuun 20. päivän aamuna, ja hän jatkaa työskentelyä tehtäväsarjan parissa joka päivä. Hän saa urakan valmiiksi tammikuun 30. päivän iltana.

Kuinka monta päivää matematiikkakilpailuvalmennettava ratkoo tehtäviä?

(d) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta lukua on jonossa $0, 1, 2, \ldots, n-1$?

2. Olkoon a, b, c, d positiivisia reaalilukuja, joille $a > c$ ja $d > b$. Osoita, että

$$\frac{a-b}{c+d} > \frac{c-d}{a+b}.$$

3. On tunnettua, että yhtälöllä

$$a^{10} + b^{10} = c^{10}$$

ei ole ratkaisuja, joissa a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

Osoita pitäen edellämainittua tunnettuna, että ko. yhtälöllä ei myöskään ole ratkaisuja, joissa a, b, c ovat positiivisia rationaalilukuja.

4. Olkoon A viiden tason pisteen joukko. Osoita, että on olemassa joukon A osajoukko B, jolle joukkoa B voidaan siirtää tasossa yhdistelmällä siirtoja (translaatioita) ja kiertoja (rotaatioita) niin, että syntyvä joukko (A:n ja siirretyn B:n yhdiste) on symmetrinen jonkun suoran suhteen.

5. Olkoon $k_1, \ldots, k_n$ suorakulmion muotoisia, keskenään samanlaisia kartonkipaloja. Kaikki nämä leikataan neliön muotoisiksi paloiksi, joiden koko voi riippua valitusta kartonkipalasta. Jokainen kartonkipala kuitenkin leikataan keskenään samankokoisiksi neliöiksi.

Näin saatujen neliöiden yhteismäärä on alkuluku.

Osoita, että kartonkipalat $k_1, \ldots, k_n$ ovat neliön muotoisia.

6. Tutkitaan yhtälöitä

$$(x-a)(x-b) = x-c$$
$$(x-b)(x-c) = x-a$$
$$(x-c)(x-a) = x-b,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Osoita, että vähintään kahdella näistä yhtälöstä on ratkaisut.

7. Tutkitaan yhtälöä

$$x^2 + ax + b = 0,$$

Missä $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Oletetaan, että tällä on reaaliset juuret x_1, x_2, missä $x_2 \notin [-1, 1]$. Osoita, että $x_1 \in [-|b|, |b|]$.

8. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ ääretön jono positiivisia kokonaislukuja ja $p_1, p_2, \ldots$ ääretön jono alkulukuja, jossa mikään luku ei toistu kahdesti ja $p_i | a_i$ kaikilla i.

Lisäksi oletetaan, että $a_{i+1} - a_i = p_{i+1} - p_i$ kaikilla i.

Osoita, että jono $a_1, a_2, \ldots$ koostuu alkuluvuista.

9. Oletetaan, että

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1.$$

Osoita, että $x+y=0$.

10. Olkoon V suunnattu verkko, jossa solmujen joukko on äärellinen. Oletetaan, että seuraavat pätevät:

1. Kaikilla solmupareilla s, s' on kaari joko solmusta s solmuun s' tai solmusta s' solmuun s. (Tästä seuraa valinnalla $s = s'$, että jokaisesta solmusta on kaari itseensä.)
2. Kaikilla solmukolmikoilla s, s', s'' pätee seuraava: Jos solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s'', niin myös solmusta s lähtee kaari solmuun s''.

Osoita, että verkossa V on solmu s, josta lähtee kaari jokaiseen verkon V solmuun.

Vaikeampia tehtäviä

11. Numeroidut kortit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sekoitetaan ja jaetaan tasan kahdelle pelaajalle A ja B, näiden käsikorteiksi.

Tikki pelataan seuraavasti: Tikin aloittaja lyö kädestään valitsemansa kortin pöytään kuvapuoli ylöspäin. Tämän jälkeen toinen pelaaja lyö kädestään valitsemansa kortin pöytään kuvapuoli ylöspäin. Korkeamman kortin lyönyt voittaa tikin.

Pelissä kaikki käsikortit pelataan peräkkäisiin tikkeihin. A aloittaa ensimmäisen tikin, ja myöhemmissä tikeissä aloittaa aina edellisen tikin voittaja. Enemmän tikkejä voittanut voittaa pelin.

Osoita, että on olemassa pelin alkuasetelma (kortit jaettu) niin, että kumpikin seuraavista ehdoista pätee:

- B:lla on voittostrategia.
- A:lla on "älytyskortti": Jos hän aloittaa ensimmäisen tikin sillä ja B erehtyy voittamaan kyseisen tikin (millä tahansa voittavalla kortilla), A:lla on tämän jälkeen voittostrategia.

12. On numeroidut kortit 1-100. Suurempi kortti lyö aina pienemmän, paitsi että ykkönen lyö sadan.

Kortit on kuvapuoli alaspäin pöydällä. Pöydän ääressä on kaksi henkilöä: Tiedottaja ja vastaanottaja. Tiedottaja tietää, missä mikin kortti on.

Tiedottaja antaa vastaanottajalle tiedonantoja seuraavasti: Hän osoittaa kahta korttia pöydällä ja kertoo, kumpi niistä lyö kumman.

Osoita, että tiedottaja voi sadalla valitsemallaan tiedonannolla viestiä vastaanottajalle jokaisen kortin sijainnin.

13. Olkoon ABC kolmio, jossa kulma $\angle BAC$ on suora. Olkoon D sivun AB keskipiste, E sivun BC keskipiste ja F sivun AC keskipiste. Pisteiden D, E ja F kautta piirretään ympyrä S.

Osoita, että S kulkee myös pisteen A ja kolmion sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapisteen G kautta.

14. Olkoon V suunnattu verkko, jossa solmujen joukko on äärellinen. Oletetaan, että seuraavat pätevät:

1. Ei ole solmuja s, s' niin, että sekä solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s. (Valitsemalla $s = s'$ saadaan tulos, että mistään solmusta ei ole kaarta itseensä.)
2. Kaikilla solmukolmikoilla s, s', s'' pätee seuraava: Jos solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s'', niin myös solmusta s lähtee kaari solmuun s''.

Osoita, että verkossa V on solmu s, josta ei lähde kaarta mihinkään verkon V solmuun.

15. Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot

- $f(nm) = f(n)f(m)$ kaikilla n, m.

- Jos $n > m$ niin $f(n) > f(m)$.
- $f(3) \geq 7$.

Mikä on pienin arvo, jonka $f(3)$ voi saada?

16. Olkoon $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{N}$. Osoita, että yhtälöllä

$$x^2 + 2(a_1 + \ldots, a_5)^2 x + (a_1^4 + \cdots + a_5^4 + 1) = 0$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja.

17. Olkoon a, b, c jonkun kolmion sivujen pituudet, ja olkoon $P(x)$ astetta n, $n \geq 2$, oleva polynomi, jonka kaikki kertoimet ovat positiivisia.

Osoita, että $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$, $\sqrt[n]{P(c)}$ ovat jonkun kolmion sivujen pituudet.

18. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku on pitkäseiskainen, jos sen kymmenjärjestelmäesitys koostuu numeroista $1, 2, \ldots, 7$, ja jokainen näistä esiintyy kymmenjärjestelmäesityksessä täsmälleen 10 kertaa.

Osoita, että mikään pitkäseiskainen luku ei ole jaollinen toisella pitkäseiskaisella luvulla.

19. Olkoon $P(n)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolle $P(P(n) + n)$ on alkuluku äärettömän monella kokonaisluvulla n.

Osoita, että $P(n)$ on nollatta tai ensimmäistä astetta.

20. Olkoon p pariton alkuluku. Sanomme, että jono $a_1, \ldots, a_p$ luonnollisia lukuja on hyvä, jos

- $a_i < p$.
- $a_1 + \cdots + a_p$ ei ole jaollinen luvulla p.
- $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \cdots + a_{p-1} a_p + a_p a_1$ on jaollinen luvulla p.

Määritä kaikkien hyvien jonojen lukumäärä.