Helmikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 9.4.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Määritellään $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $f(0) = 2$ ja induktiivisesti $f(n+1) = 2^{f(n)}$.
Määritä pienin n, jolle luvun $f(n)$ kymmenjärjestelmäesityksessä on yli 10000 numeroa.

2. Olkoon r irrationaaliluku ja q_1, q_2 rationaalilukuja, missä $q_2 \neq 0$. Osoita, että $q_1 + q_2 r$ ja $q_1 + q_2 \frac{1}{r}$ ovat myös irrationaalilukuja.

3. Eräässä maassa on joukko K kaupunkeja. Kaupunkien välillä kulkee yksisuuntaisia lentoja (Jos a:sta b:hen kulkee lento, b:stä a:han voi kulkea lento tai olla kulkematta). Sanomme, että kaupunki b on saavutettavissa kaupungista a, jos a:sta b:hen voi lentää mahdollisesti vaihtaen lentoa useaankin kertaan. (Määritellään myös, että jokainen kaupunki on saavutettavissa itsestään käsin.)

Jos a ja b ovat mitä tahansa kaupunkeja, on olemassa kaupunki c, jolle sekä a että b ovat saavutettavissa c:stä.

Osoita, että on olemassa kaupunki c_0, jolle kaikki kaupungit ovat saavutettavissa c_0:sta.

4. Ympyrät S ja T leikkaavat toisensa pisteissä P ja Q. Pisteen P kautta piirretään suorat s_1 ja s_2. Suora s_1 leikkaa ympyrän S pisteessä A_1 ja ympyrän T pisteessä B_1. Lisäksi suoralla s_1 piste P on pisteiden A_1 ja B_1 välissä. Suora s_2 leikkaa ympyrän S pisteessä A_2 ja ympyrän T pisteessä B_2. Lisäksi suoralla s_2 piste P on pisteiden A_2 ja B_2 välissä.

Osoita, että kolmiot A_1B_1Q ja A_2B_2Q ovat yhdenmuotoisia.

5. Todista, että lävistäjät jakavat suunnikkaan neljään pinta-alaltaan yhtäsuureen osaan.

6. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa AB on kanta. Janalta AB valitaan piste P, ja P:stä piirretään normaalit N_A ja N_B sivuille AC ja BC.

Osoita, että pituus $|PN_A| + |PN_B|$ ei riipu pisteen P valinnasta. $|\cdot|$ merkitsee janan pituutta.

7. (a) Onko mahdollista valita tasosta 10 punaista, 10 sinistä ja 10 keltaista pistettä niin, että seuraavat pätevät:

- Kyseisten 30 pisteen joukosta ei voida valita kahta pisteparia niin, että kyseisten pisteparien keskinäiset etäisyydet olisivat samat.
- Jokaisen punaisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on sininen.
- Jokaisen sinisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on keltainen.
- Jokaisen keltaisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on punainen.

(b) Entä jos edellisestä ensimmäinen ehto jätetään pois, ja kolmessa muussa ehdossa ei vaadita yksikäsitteisen lähimmän pisteen väriä, vaan jos pisteellä on useita yhtä läheisiä lähimpiä naapuripisteitä, riittää, että yksi niistä on vaadittua variä.

8. Osoita, että jokainen kaksinumeroinen luku, joka on jaollinen numeroidensa summalla on myös jaollinen luvulla 10 tai luvulla 3.

9. Taululla on n positiivista kokonaislukua, $n > 2$, joista jokainen on pienempi kuin $(n-1)!$. Paula muodostaa jokaiselle parille (a, b) ko. lukuja osamäärän a/b, missä isompi on jaettu pienemmällä ja pyöristetty alaspäin lähimpään kokonaislukuun.

Osoita, että osamäärien joukossa on kaksi, jotka ovat keskenään yhtäsuuria.

Vaikeampia tehtäviä

10. 20 ystävystä osuu yhtaikaa ruokakaupan kassalle. Heillä on eri määrät ostoksia, joten heillä kestää eri aika asioida kassalla. (Oletamme, että tuo aika riippuu pelkästään ostosten määrästä.)

Ystävykset päättävät mennä kassalle sellaisessa järjestyksessä, että kaikkien henkilöiden odotusaikojen summa on pienin mahdollinen. Osoita, että pienin summa saavutetaan, kun ensin kassalle menee se, jolla on vähiten ostoksia, sitten se, jolla on toiseksi vähiten, sitten se, jolla on kolmanneksi vähiten jne.

11. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jossa kulma ABC on suora. Piirretään ympyrä S,joka kulkee ko. kolmion sivujen keskipisteiden kautta. Osoita, että myös piste B ja hypotenuusaa vasten piirretyn korkeusjanan kantapiste D ovat ympyrällä S.

12. Osoita, että on olemassa irrationaaliluku r, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- r^n on irrationaalinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.
- On olemassa positiiviset kokonaisluvut n, m, joilla $r^n + r^m$ on rationaaliluku.

13. $2n + 1 \times 2n + 1$-ruudukosta osa ruuduista väritetään punaiseksi ja loput siniseksi. Sanomme, että ruudukossa rivi on punainen, jos sillä on enemmän punaisia kuin sinisiä ruutuja. Sanomme, että sarake on sininen, jos siinä on enemmän sinisiä kuin punaisia ruutuja.

Olkoon P punaisten rivien määrä ja S sinisten sarakkeiden määrä. Mikä on summan $S+P$ maksimiarvo?

14. Olkoon P, Q polynomeja, joiden kertoimet ovat luonnollisia lukuja (nolla on luonnollinen luku), ja on olemassa positiiviset kokonaisluvut $a \neq b$, joille $P(a) = Q(a)$ ja $P(b) = Q(b)$. Oletetaan, että kaikki P:n kertoimet ovat pienempiä kuin b. Osoita, että $P = Q$.

15. Olkoon n_0 positiivinen kokonaisluku. Määritellään jono ääretön jono $n_0, n_1, n_2, \ldots$ seuraavasti: Jos n_i on jaollinen viidellä, $n_{i+1} = \frac{n_i}{5}$ (a-askel). Muutoin $n_{i+1} = \lfloor x\sqrt{5} \rfloor$ (b-askel).

Osoita, että jonossa on vain äärellinen määrä a-askelia-

16. Olkoon $n_1, \ldots, n_{2000}$ jono kokonaislukuja niin, että jokainen $-1000 \leq n_i \leq 1000$, ja $\sum n_i = 1$.

Osoita, että on olemassa epätyhjä $I \subset \{0, 1, \ldots, 2000\}$, jolle $\sum_{i \in I} n_i = 0$.

17. Osoita, että yhtälöryhmällä

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

ei ole ratkaisuja positiivisten reaalilukujen joukossa.

18. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{100}$.

Seuraavat pätevät:

- $x_1 + x_2 \leq 100$.
- $x_3 + \cdots + x_{100} \leq 100$.

Määritä suurin arvo summalle $x_1^2 + \cdots + x_{100}^2$.