Huhtikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 28.5.2023 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Kaksinumeroisen luvun n numeroiden summa on 13. Kun luvusta vähennetään 27, siinä on samat numerot, mutta päinvastaisessa järjestyksessä.

Määritä n.

2. Kun taso jaetaan ruutuihin kuten ruutupaperilla, sanotaan, että se on peitetty neliöillä. Samaan tapaan taso voidaan peittää myös tasasivuisilla kolmioilla tai säännöllisillä kuusikulmioilla. (Ts. jokainen tason piste on täsmälleen yhden monikulmion sisäpiste, täsmälleen kahden monikulmion sivulla tai useamman monikulmion kulmassa.)

Osoita, että tasoa ei voida peittää samaan tapaan muilla säännöllisillä monikulmioilla kuin edellämainituilla.

3. Positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat $a + b + c + d \leq 40$. Määritä tulon $abcd$ suurin mahdollinen arvo.

4. Olkoon S ympyrä, O sen keskipiste ja P piste ympyrän ulkopuolella. Piirretään pisteestä P ympyrälle S tangentit ja ja pisteestä O tangenttien suuntaiset suorat. Olkoon A ja B tangenttien ja em. suorien leikkauspisteet.

Osoita, että nelikulmio $OAPB$ on neljäkäs.

5. Joukon $S = \{-1, -2, \ldots, -2023\}$ jokaiselle epätyhjälle osajoukolle A muodostetaan A:n alkioiden tulo $\prod A$.

Mikä on kaikkien tulojen $\prod A$ summa?

6. Olkoon a ja b viitosen potensseja, $a \neq b$. Näiden kymmenjärjestelmäesitykset kirjoitetaan peräkkäin ja saadaan luku c.

Osoita, että c ei ole viitosen potenssi.

7. Puolisuunnikaassa $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. Olkoon O lävistäjien leikkauspiste. Osoita, että kolmioilla ADO ja BCO on sama pinta-ala.

8. Luonnolliset luvut kirjoitetaan äärettömäksi kolmioksi kuten alla

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 4 & 5 & 6 & \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ \ldots & & & \end{array}$$

Mikä on n:nnen rivin lukujen summa?

9. Olkoon $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktiota, jotka toteuttavat $f(x + g(y)) = 2x + y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Määritä $g(x + f(y))$.

10. Kolmiossa on kaksi keskenään yhtä pitkää mediaania. Osoita, että kolmio on tasakylkinen.

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoon x, y, z positiivisia reaalilukuja, joille $xy + yz + zx = 27$

Osoita, että

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

12. Olkoon p luonnollinen luku. Oletetaan, että luvut $p, 3p + 2, 7p + 6, 9p + 8, 11p + 10$ ovat alkulukuja.

Osoita, että $6p + 11$ pn yhdistetty luku.

13. Ympyrän kehälle on kirjoitettu n reaalilukua, jokainen välillä $[0, 1]$. Lisäksi jokainen luku on kahden sitä myötäpäiväisessä kiertosuunnassa edeltävän luvun erotuksen itseisarvo.

Olkoon n annettu. Määrää ympyrän kehällä olevien lukujen summan maksimiarvo.

14. Osoita, että on olemassa äärettömän monta luonnollista lukua n, joille n ja $n + (n + 1)$ eivät ole neliölukuja, mutta $n + (n + 1) + (n + 2)$ on neliöluku.

15. Tutkitaan murtolukua

$$\frac{\square + \square + \cdots + \square}{\square + \square + \cdots + \square + \square},$$

missä yläkerrassa on 1010 tyhjää paikkaa ja alakerrassa 1011. Kaksi pelaajaa, A ja B pelaavat peliä, jossa kumpikin vuorollaan sijoittaa jonkun luvuista $1, 2, \ldots, 2021$ johonkin tyhjään paikkaan. Kunkin luvun ja paikan saa käyttää vain kerran.

A aloittaa. A voittaa pelin, jos lopussa saatu murtoluku eroaa ykkösestä korkeintaan 10^{-6} verran. B voittaa muutoin.

Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

16. Aatu ja Bertta pelaavat seuraavaa peliä: Taululla on 17 luonnollista lukua, joista yksikään ei ole jaollinen luvulla 17. Aatu aloittaa.

Vuorollaan

- Aatu valitsee taululta jonkun luvun a ja korvaa sen luvulla a^2.
- Bertta valitsee taululta jonkun luvun b ja korvaa sen luvulla b^3.

Aatu voittaa, jos äärellisen askelmäärän jälkeen lukujen summa on jaollinen luvulla 17. Bertta voittaa, jos peli jatkuu äärettömiin.

Osoita, että Aatulla on voittostrategia.

17. Sanomme, että kolmikko a, b, c positiivisia kokonaislukuja on n-kelvollinen, jos $a + b + c | a^n + b^n + c^n$.

Onko olemassa kolmikkoa a, b, c, joka on 2020-kelvollinen ja 2021-kelvollinen, muttei 2023-kelvollinen?

18. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $a + b + c = 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{2a + 1} + \frac{b}{3b + 1} + \frac{c}{6c + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

19. Etsi kaikki luvut $k, \ell \in \mathbb{R}$, joille

$$ka^2 + \ell b^2 > c^2$$

pätee kaikkien kolmioiden sivujen pituuksilla a, b, c.