Kesän hauska valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 31.8.2023 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Pelilauta koostuu 15 peräkkäisestä ruudusta. 2 pelaajaa pelaa, ja kummallakin on oma pelinappula. Aluksi pelinappulat ovat pelilaudan ensimmäisessä ruudussa, ja voittaja on se, joka saa ensimmäisenä siirrettyä nappulansa laudan viimeiseen ruutuun.

Vuorollaan pelaaja siirtää nappulaansa yhden nappulan eteenpäin laudalla.

Kummallakin pelaajalla on kaksi bonusta. Bonuksella nappulaa siirretään vuorolla kaksi askelta eteenpäin yhden sijaan, mutta kunkin bonuksen saa käyttää vain kerran pelin aikana.

Kummalakin pelaajalla on vielä superbonus, jolla nappulaa saa siirtää vuorolla kolme askelta eteenpäin yhden sijaan, mutta superbonuksen saa käyttää vain kerran pelin aikana.

Osoita, että pelin aloittajalla on voittostrategia.

2. Taikuri Ananaskäämi antaa Annalle seuraavat ohjeet: ”Ajattele jotain luonnollista lukua. Kerro luku kahdella ja lisää siihen kolme. Kerro luku vielä kahdella ja lisää siihen kaksi. Kerro luku vielä kahdella ja vähennä siitä viisi. Jaa luku vielä kahdeksalla ja ota jakojäänös.”

Anna noudattaa ohjeita, ja tämän jälkeen Ananaskäämi pystyy kertomaan Annalle, minkä luvun tämä sai jakojäännökseksi. Kuinka se on mahdollista?

3. 3×3 -taulukon jokainen solu sisältää aluksi luvun 0. Taulukolle voidaan tehdä seuraavia operaatioita:

- Jokaiseen jonkun rivin soluun lisätään luku 1.
- Jokaisesta jonkun sarakkeen solusta vähennetään luku 1.
- Jokaista jonkun rivin lukua siirretään yksi ruutu oikealle (ja oikeanpuolimmaisin rivin luku siirretään rivin vasemmanpuolimmaiseen soluun.)
- Jokaista jonkun sarakkeen lukua siiretään yksi ruutu alaspäin (ja alin sarakkeen luku siirretään sarakkeen ylimpään soluun.)

Onko sarjalla tällaisia operaatioita mahdollista päästä taulukkoon, jonka vasemmassa yläkulmassa ja oikeassa alakulmassa ovat ykköset, ja muut solut ovat nollia?

4. Alla rivit tarkoittavat vaakarivejä, sarakkeet pystyrivejä.

Taikuri Ananaskäämi jakaa 27 pelikorttia kuvapuoli ylöspäin yhdeksäksi kolmen kortin riviksi, rivit ovat allekkain muodostaen yhdeksän saraketta. Sitten hän pyytää Annaa ajattelemaan jotain korttia ja kertomaan, missä sarakkeessa se on.

Ananaskäämi kerää kortit pakaksi sarake kerrallaan ylhäältä alas, Annan osoittama sarake keskimmäiseksi.

Ananaskäämi jakaa kortit rivi kerrallaan vasemmalta oikealle yhdeksäksi kolmen kortin riviksi.

Ananaskäämi pyytää taas Annaa osoittamaan, missä sarakkeessa hänen alussa valitsemansa kortti on, ja hän toistaa korttien keräämisen ja uudelleenjaon kuten äsken.

Sitten Ananaskäämi pyytää taas Annaa osoittamaan, missä sarakkeessa hänen alussa valitsemansa kortti on.

Nyt Ananaskäämi pystyy osoittamaan, mikä Annan alussa valitsema kortti on. Kuinka se on mahdollista? (Toisin sanoen miksi temppu väistämättä onnistuu ylläkuvatulla tavalla.)

5. Teen sinulle taikatempun. Ajattele itseäsi allaolevan ruudukon ruutuun A ja siirrä itseäsi 5 askelta. Askel tarkoittaa siirtymistä ruutuun, jolla on yhteinen sivu edellisen ruudun kanssa. Voit vaihtaa vapaasti suuntaa, myös astua taaksepäin.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Tiedän, ettet ole ruuduissa C, G tai I, joten ne voidaan poistaa. Järjestellään ruudut uudelleen

D	A	B	X
X	F	E	H

Jatka nyt samasta kirjaimesta, jossa olit ensimmäisessä ruudukossa, ja siirry ylläolevassa ruudukossa 7 askelta. Älä siirry X:llä merkittyihin ruutuihin, koska niissä on pommi.

Tiedän, että et ole ruuduissa tai D, H, joten ne voidaan poistaa. Nyt ruudukko on

A	B
F	E

Jatka nyt samasta kirjaimrsta jossa olit ja siirry 3 askelta ylläolevassa ruudukossa.

Tiedän, ettet ole ruudussa A, joten se voidaan poistaa. Järjestellään ruudut uudelleen

B	E	F

Jatka nyt samasta kirjaimesta jossa olit ja siirry 1 askel ylläolevassa ruudukossa.

Simsalabim, tiedän, että olet ruudussa E.

Tehtävä: Selitä, miksi edellinen temppu väistämättä onnistuu.

6. Anne ja Bertta pelaavat peliä joukkueena Carlia vastaan. Bertta poistuu huoneesta, ja Carl jakaa 100 esinettä kahteen kasaan, punaiseen ja siniseen kasaan (jompi kumpi kasaa saa myös jäädä tyhjäksi). Punainen kasa on punaisen huovan päällä ja sininen kasa sinisen huovan päällä; kaikki esineet ovat keskenään samanlaisia.

Sen jälkeen Anne poistaa yhden esineen jommasta kummasta kasasta. Tämän jälkeen Carl saa vielä järjestellä kasoja uudelleen, mutta tässä vaiheessa hän ei saa siirtää esinettä kasasta toiseen.

Bertta tulee huoneeseen ja yrittää arvata, kummasta kasasta Anne poisti esineen. Anne ja Bertta voittavat, jos Bertta arvasi oikein. Muutoin Carl voittaa.

Osoita, että Anne ja Bertta eivät pysty sopimaan systeemiä, jolla he voittavat varmasti.

7. Anne ja Bertta pelaavat peliä joukkeena Carlia vastaan. Bertta poistuu huoneesta.

Huoneen seinällä on kiekko, jota voi pyörittää. Carl merkitsee kiekon kehältä 20 pistettä. Tämän jälkeen Anne poistaa merkin yhdestä Carlin merkitsemistä pisteistä. Tämän jälkeen Carl saa vielä pyörittää kiekkoa.

Bertta tulee huoneeseen ja yrittää arvata, minkä kahden merkityn pisteen välistä Anne poisti merkin. Anne ja Bertta voittavat, jos Bertta arvasi oikein. Muutoin Carl voittaa.

Osoita, että Anne ja Bertta voivat sopia systeemin, jolla he voittavat varmasti.

8. 20×20 -ruudukon sarakkeet on numeroitu vasemmalta oikealle ja rivit ylhäältä alas. Ruudukosta on valittu ruutuja. Jos r on valittu ruutu, ei ole toista valittua ruutua, jonka sekä rivinumero olisi sama tai suurempi että sarakenumero olisi sama tai suurempi.

Mikä on suurin mahdollinen määrä valittuja ruutuja?

9. Oletetaan, että meillä on n kuulaa, $n \geq 4$. Millään kahdella kuulalla ei ole samaa painoa, eikä millään kahdella kuulaparilla ole samaa yhteispainoa.

Meillä on käytössä tasapainovaaka, jossa on kaksi vaakakuppia, ja se kuppi painuu alas, jossa on suurempi paino. Punnituksella tarkoitamme operaatiota, jossa kumpaankin kuppiin laitetaan täsmälleen kaksi kuulaa, ja vaaka kertoo, kummassa kupissa on painavampi lasti.

Osoita, että riittävän pitkällä, sopivasti valitulla sarjalla punnituksia pystytään löytämään joko kevein tai raskain kuula.

Vaikeampia tehtäviä

10. Postimiehellä on 101 pakettia, joiden painot ovat $1, 2, \ldots, 101$. Voiko postimies jakaa ne kolmeen kasaan, joiden yhteispainot ovat samat?

11. $n \times n$-ruudukko pitää peittää T-tetrominoilla eli muodoilla, jonka allaolevat X:t muodostavat

X X X
  X

Paloja saa pyöritellä. Millä n:n arvoilla koko laudan saa peitettyä?

12. Martta haluaa valmistaa korttipakan, joka täyttää seuraavat ehdot:

1. Jokaisessa kortissa on yksi luku viidestä mahdollisesta luvusta.
2. Jokainen viidestä mahdollisesta luvusta on vähintään yhdessä kortissa
3. Kun Martta ottaa korteista mitkä tahansa kaksi ja laskee niiden luvut yhteen, pakasta löytyy toiset kaksi korttia, joiden lukujen summa on sama.

Mikä on pienin määrä kortteja, jolla Martan on mahdollista tehdä tällainen pakka?

13. n pelaajaa, $n \geq 2$ osallistuu lautapeliin. Pelin jälkeen voittajalle annetaan pääkirjaan n pistettä, toiseksi tulleelle $n-1$ pistettä jne.

Sama porukka toistaa samaa niin, että pelataan yhteensä k peliä. Kun kunkin pelaajan pääkirjan pisteet lasketaan yhteen, havaitaan, että jokaisella on yhteensä 26 pistettä.

Millä (n, k)-pareilla tämä on mahdollista?

14. Äärettömällä ruutupaperilla on pelinappuloita 10×10-neliön jokaisessa ruudussa, yksi nappula jokaisessa ruudussa. Kutsumme nappuloita vierekkäisiksi, jos niiden ruuduilla on yhteinen sivu.

Nappulat järjestellään uudelleen niin, että yhteen ruutuun ei tule enempää kuin yksi nappula, ja lisäksi nappulat ovat vierekkäisiä siirron jälkeen jos ne olivat vierekkäisiä ennen siirtoa. Lisäksi siirron jälkeen saatu muoto on täytetty muoto, jossa ei ole reikiä sisällä.

Osoita, että nappulat täyttävät myös siirron jälkeen 10×10 -neliön.

15. Aatu ja Beetu pelaavat seuraavaa peliä: Ensin Aatu asettaa 46 pelinappulaa 9×9-ruudukon joihinkin ruutuihin, korkeintaan yksi nappula ruutuunsa.

Sitten Beetu yrittää etsiä ruudukolta 2×2 -blokin, jossa on vähintään kolme pelinappulaa. Beetu voittaa, jos hän onnistuu. Aatu voittaa muutoin.

Osoita, että voittostrategia on Beetulla.

16. 2000 ihmistä seisoo rivissä. Kukin ihminen on joko valepukki, joka valehtelee aina tai totuuden torvi, joka kertoo aina totuuden.

Kaikki ihmiset sanovat yhteen ääneen: ”Vasemmalla puolellani on enemmän valepukkeja kuin oikealla puolellani totuuden torvia.”

Onko ylläolevien tietojen valossa mahdollista määrittää, kuinka monta valepukkia ja kuinka monta totuuden torvea jonossa on?

17. Emilia on Touko Jurkan kuvataidekoulun pääsykokeessa. Jurkka antaa Emilialle luonnollisen luvun n ja seuraavan tehtävän:

Emilian on piirrettävä jana, jonka pituus on 1, sitten jana jonka pituus on 2, sitten jana, jonka pituus on 3 jne. aina haluamaansa pituuteen saakka. Emilia ei saa nostaa kynää, eli $k+1$:nnen janan on alettava siitä, mihin k:s jana loppui. Janat saavat ristetä, jopa kulkea päällekkäin.

Emilia hyväksytään kouluun, jos hänen piirtämänsä janat muodostavat täsmälleen, ilman mitään ylimääräistä, sellaisen neliön reunat, jonka sivun pituus on vähintään n.

Onko Emilian mahdollista päästä kouluun kaikilla n:n arvoilla?

18. Pöydällä on alassuin 405 korttia, joissa on luvut $1, 2, \ldots, 405$.

Oraakkeli ja järjestäjä pelaavat peliä. Oraakkeli tuntee korttien luvut, järjestäjä ei.

Järjestäjä esittää kysymyksen seuraavasti: Järjestäjä valitsee kolme korttia, ja oraakkeli kertoo, mikä noista korteista on suurin ja mikä pienin.

Onko järjestäjän mahdollista päätellä kaikkien korttien luvut 2000 kysymyksellä?