Lokakuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 26.11.2023 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Liukuportaat kulkevat ylöspäin yhden askelman kahdessa sekuntissa. Janne on keskellä liukuportaita. Hän kävelee askelman sekuntissa. Ensin yhden ylös, sitten kaksi alas, sitten yhden ylös, sitten kaksi alas jne.

Kulkeeko Janne kokonaisuutena ylös- vai alaspäin?

2. Olkoon A niiden tason pisteiden joukko, joiden kummatkin koordinaatit ovat kokonaislukuja. Tarkastelemme tässä tehtävässä tason jakoa nelikulmioihin, jotka toteuttavat seuraavat ehdot

- Kaikkien nelikulmioiden kaikki kärjet ovat joukon A pisteitä, ja jokainen joukon A piste on vähintään yhden nelikulmion kärki.
- Jokainen tason piste on joko täsmälleen yhden nelikulmion sisäpiste, täsmälleen kahden nelikulmion yhteinen reunapiste, tai useamman nelikulmion kärki.

Tason jako neliönmuotoisiin ruutuihin kuten ruutupaperilla, ja ruudun sivunpituus on 1, on selvästi ylläolevat ehdot toteuttava jako nelikulmioihin. Anna esimerkki jostain muusta ylläolevat ehdot toteuttavasta tason jaosta nelikulmioihin.

3. Meillä on tavallinen kuutionmuotoinen noppa, jonka tahkot on numeroitu 1-6, jokainen luku käytetään kerran. Kutsutaan näitä lukuja silmäluvuiksi. Tahkot 1 ja 6 ovat vastakkaisia, samoin tahkot 2 ja 5 ovat vastakkaisia ja tahkot 3 ja 4 ovat vastakkaisia.

Nopasta valitaan tahko t, ja lasketaan yhteen kaikkien niiden tahkojen silmäluvut, joilla on yhteinen särmä tahkon t kanssa, paitsi tahkon t itsensä silmälukua ei lasketa mukaan tähän summaan. Mitä kaikkia arvoja kyseinen summa voi saada?

4. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa.

$$x^2 + y^2 = 10(x + y)$$
$$x^2 - y^2 = 2(x - y)$$

5. Olkoon $n > 1$ positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < 1$$

6. Olkoon kolmiossa sivut a, b, c, käytetään samoja kirjaimia myös sivujen pituuksina. Sivuille a ja b piirretyt mediaanit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Osoita, että $a^2 + b^2 = 5c^2$.

7. Olkoon $x_1, \ldots, x_{101}$ keskenään erisuuria reaalilukuja. Muodostetaan summat $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_4$, $\ldots$, $x_{101} + x_1$.

Mikä on pienin mahdollinen määrä eri lukuja, joka näissä summissa voi esiintyä?

8. Kolme ballerinafiguuria pyörii jalustoillaan. Ensimmäinen tekee täyden kierroksen 30 sekuntissa, toinen 50 sekuntissa ja kolmas 70 sekuntissa. Hetkellä 0 kaikkien kasvot osoittavat pohjoiseen.

Mikä on ensimmäinen hetki, kuin kaikkien kasvot osoittavat etelään?

9. Etsi kaikki seuraavat yhtälön ratkaisut, kun a, b, c ovat positiivisia reaalilukuja.

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Vaikeampia tehtäviä

10. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit P, jotka toteuttavat yhtälön

$$P(x + P(x)) = x^2 P(x)$$

kaikilla reaaliluvuilla x.

11. Avaruusaluksen miehistö koostuu n avaruusmiehestä. Avaruusmiehet syyttelevät toisiaan cyloneiksi, kuitenkin niin, että seuraavat pätevät:

- Jokainen tekee eri määrän syytöksiä.
- Jokainen saa niskaansa eri määrän syytöksiä.
- Kukaan ei syytä itseään.

Osoita, että ei ole kahta avaruusmiestä niin, että he syyttäisivät toisiaan.

12. Olkoon a, b positiivisia kokonaislukuja, joille $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Osoita, että $\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}$.

13. Ratkaise seuraava yhtälöryhmä kokonaislukujen joukossa.

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 1 \\ z^2 = xy + 1 \end{cases}$$

14. Olkoon a, b rationaalilukuja, joille $a + b$ ja $a^2 + b^2$ ovat kokonaislukuja. Osoita, että a, b ovat kokonaislukuja.

15. Luokassa on 37 oppilasta. Opettaja antaa kullekin oppilaalle 36 väriliitua niin, että seuraavat ehdot pätevät:

- Kukaan ei saa kahta samanväristä väriliitua.
- Jos A ja B ovat ketkä tahansa kaksi oppilasta, A:lla ja B:llä on täsmälleen yhdet samanväriset liidut.

Mikä on pienin määrä eri värejä, joka opettajalla pitää olla käytössään?

16. Olkoon n luonnollinen luku. Pelilauta koostuu 40 ympyrän kehällä tasavälein olevasta numeroidusta pisteestä. Anne ja Bertta pelaavat seuraavaa peliä. Alussa Anne asettaa pelinappulan johonkin pelilaudan pisteeseen.

Bertta ei näe pelilautaa, mutta vuorollaan Bertta ilmoittaa neljä pelilaudan pistettä, ja jos nappula on jossain niistä, Bertta voittaa.

Vuorollaan Anne siirtää nappulaa yhden askeleen jompaan kumpaan suuntaan tai antaa nappulan olla paikallaan.

Anne voittaa, jos Bertta ei voita n vuorossa.

Määritä pienin n, jolle Bertalla on voittostrategia.

17. Olkoon $\frac{a}{600}$ ja $\frac{b}{700}$ sievennetyssä muodossa olevia positiivisia murtolukuja.

Jos luku $\frac{a}{600} + \frac{b}{700}$ kirjoitetaan sievennetyssä muodossa, mikä on pienin mahdollinen arvo nimittäjässä?

18. 128 ihmistä istuu rivissä pitkän pöydän äärellä. Vasemmanpuolimmaisella tyypillä on 128 paperia pinkassa. Kello soi minuutin välein. Aina kun kello soi, jokainen ihminen voi halutessaan tehdä yhden seuraavista operaatioista

- Jakaa itsellään olevan paperipinkan kahdeksi yhtä suureksi pinkaksi.
- Siirtää yhden itsellään olevan pinkan jommallekummalle naapurilleen.

Ihmiset yrittävät jakaa paperit niin, että lopussa jokaisella on yksi paperi. Kuinka kauan tähän vähimmillään kuluu?