Vuodenvaihteen 2023–2024 valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Myös osittaiset ratkaisut tai vain yritykset muutamaan tehtävään kannattaa palauttaa. Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 31.1.2024 mennessä sähköpostitse.

Helpommat: Anni Tapionlinna, anni.tapionlinna@gmail.com
Vaikeammat: Neea Palojärvi, npalojarvi@gmail.com

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Koska niin ratkaisuiden ymmärrettävyyden kuin kilpailuissa saatavien pisteiden kannalta on oleellista, että ratkaisut on kirjoitettu selkeällä ja riittävän tarkalla tavalla, kiinnitetään ratkaisuista saatavassa palautteessa huomiota myös ratkaisuiden kirjoitusasuun.

Huomiota kiinnitetään mm. seuraaviin asioihin:

- Onko päättelyaskeleet perusteltu järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä ole tehty. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Olkoon $ABC - DEF - GHIJ$ jokin puhelinnumero, missä jokainen kirjain kuvaa eri numeroa. Lisäksi luvut D, E ja F ovat peräkkäisiä parillisia lukuja, luvut G, H, I ja J peräkkäisiä parittomia lukuja sekä on voimassa $A > B > C$, $D > E > F$, $G > H > I > J$ ja $A + B + C = 9$. Mikä puhelinnumero on?

2. A ja B leipovat maanantaina kakkuja. A leipoo kakun joka viides päivä ja B leipoo kakun joka toinen päivä. Kuinka monen päivän jälkeen he molemmat leipovat seuraavan kerran kakun maanantaina?

3. Olkoon $x \geq 1$ reaaliluku. Kumpi luvuista on suurempi; $\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ vai $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$?

4. Kuinka montaa kokonaisluvuista $1, 2, 3 \ldots, 50$ ei voi kirjoittaa kolmen erisuuren kokonaisluvun $1, 2, 3, \ldots, 15$ summana?

5. Laatikossa on keltaisia, sinisiä ja punaisia palloja, kymmenen kutakin väriä. Kuinka monella eri tavalla pallot voidaan jakaa kymmenen ja 20 pallon ryhmiin niin, että kumpikin ryhmä sisältää ainakin yhden pallon kutakin väriä?

6. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Järjestetään kokonaisluvut $1, 2, 3, \ldots, n$ jonoon niin, että kukin jonossa oleva luku on joko suurempi tai pienempi kuin kaikki edelliset luvut. Esimerkiksi siis jono 213 käy, sillä $3 > 2$, $3 > 1$ ja $1 < 2$. Sen sijaan jono 132 ei käy, sillä $2 > 1$, mutta $2 < 3$. Kuinka monella eri tavalla luvut voidaan järjestää halutulla tavalla?

7. Onko olemassa kolmio ABC, jonka ortokeskus H on kärjen C peilaus suoran AB suhteen?

8. Mikä on suurin kokonaisluku, joka jakaa luvun

$$(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9) \tag{1}$$

kaikilla positiivisilla, parillisilla kokonaisluvuilla n?

9. Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut x, joilla $x^{x^{2020}} = 2020$.

10. Olkoon Q tason mielivaltainen piste ja M janan AB keskipiste. Osoita, että

$$|QA|^2 + |QB|^2 = 2\,|QM|^2 + |AB|^2/2.$$

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoot kolmiot ABC ja $AB'C'$ tasasivuisia, joissa kärjet on nimetty vastapäivään kiertäen. Lisäksi olkoot P, Q ja R janojen AC, AB' ja BC' keskipisteet. Osoita, että kolmio PQR on tasasivuinen.

12. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (n, m), joissa lukujen m ja n artimeettinen ja geometrinen keskiarvo ovat eri kaksinumeroisia lukuja, joissa on samat numerot.

13. Etsi kaikki alkuluvut p, joilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} p + 1 = 2m^2 \\ p^2 + 1 = 2n^2 \end{cases}$$

on kokonaislukuratkaisu (m, n).

14. Olkoon $p \geq 3$ alkuluku. Määritellään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

missä $\{x\} = x - [x]$ on luvun x murto-osa. Määritä $f(p)$.

15. Etsi kaikki kaksinumeroiset kokonaisluvut $n = 10a + b$ ($a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$), jotka jakavat luvun $k^a - k^b$ kaikilla kokonaisluvuilla k.

16. Etsi kaikki reaaliset funktiot $f(x)$, jotka on määritelty välillä $(-1, 1)$ ja jotka ovat tällä välillä jatkuvia sekä on voimassa

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \quad (x, y, x+y \in (-1, 1)).$$

17. Pöydällä on rivissä n lappua, joiden toinen puoli on valkoinen ja toinen musta. Kustakin lapusta on valkoinen puoli näkyvillä. Jos mahdollista, niin yhdellä askeleella valitaan yksi lappu, jolla on valkoinen puoli näkyvillä ja joka ei ole kumpikaan rivin reunimmaisista lapuista, käännetään valitun lapun viereiset laput ja poistetaan valittu lappu.

Osoita, että lopussa voi olla tasan kaksi lappua jäljellä jos ja vain jos $3 \nmid n - 1$.

18. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.