Tammikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 26.2.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. (a) Leirille mennään maanantaina ja sieltä lähdetään pois saman viikon sunnuntaina.
Kuinka monta yötä leirillä ollaan?

(b) Rata koostuu kymmenestä peräkkäisestä ruudusta. Pelinappula on alussa radan ensimmäisessä ruudussa. Siirto tarkoittaa sitä, että nappulaa siirretään radalla yksi ruutu eteenpäin.

Kuinka monta siirtoa pitää tehdä, että nappula saataisiin radan viimeiseen ruutuun?

(c) Matematiikkakilpailuvalmennettava aloittaa tehtäväsarjan ratkaisemisen tammikuun 20. päivän aamuna, ja hän jatkaa työskentelyä tehtäväsarjan parissa joka päivä. Hän saa urakan valmiiksi tammikuun 30. päivän iltana.

Kuinka monta päivää matematiikkakilpailuvalmennettava ratkoo tehtäviä?

(d) Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Kuinka monta lukua on jonossa $0, 1, 2, \ldots, n-1$?

1. tehtävän ratkaisu: (a) Vastaus: Leirillä ollaan kuusi yötä.

Leirille mennään ensimmäisenä leiripäivänä ja sielä poistutaan seitsemäntenä.

Ensimmäinen yö on ensimmäisen ja toisen leiripäivän välinen, toinen yö on toisen ja kolmannen leiripäivän välinen jne.

Siis kuudes yö on kuudennen ja seitsemännen leiripäivän välinen.

(b) Vastaus: Nappulaa pitää siirtää yhdeksän kertaa.

Ensimmäisellä siirrolla nappula siirretään radan ensimmäisestä ruudusta toiseen, toisella siirrolla radan toisesta ruudusta kolmanteen jne.

Siis yhdeksännellä siirrolla nappula siirretään radan yhdeksännestä ruudusta viimeiseen.

(c) Vastaus: Matematiikkakilpailuvalmennettava ratkoo tehtäviä 11 päivää.

20. päivän iltana hän on ratkonut tehtäviä yhden päivän. 21. päivän iltana hän on ratkonut tehtäviä kaksi päivää. 22. päivän iltana hän on ratkonut tehtäviä kolme päivää jne.

30. päivän iltana hän on siis ratkonut tehtäviä 11 päivää.

(d) Vastaus: Jonossa on n lukua.

Jonossa $1, 2, 3, \ldots, n$ on n lukua. Jonossa $0, 1, 2, \ldots, n-1$ on yksi luku enemmän alussa ja yksi luku vähemmän lopussa, siis yhteensä n lukua.

2. Olkoon a, b, c, d positiivisia reaalilukuja, joille $a > c$ ja $d > b$. Osoita, että

$$\frac{a-b}{c+d} > \frac{c-d}{a+b}.$$

2. tehtävän ratkaisu: Koska $a > c$ ja $d > b$, pätee

$$a^2 - b^2 > c^2 - d^2.$$

Soveltamalla muistikaavaa kummallakin puolella saadaan

$$(a-b)(a+b) > (c-d)(c+d).$$

Jakamalla puolittain luvulla $(a+b)(c+d)$ saadaan

$$\frac{a-b}{c+d} > \frac{c-d}{a+b}.$$

3. On tunnettua, että yhtälöllä

$$a^{10} + b^{10} = c^{10}$$

ei ole ratkaisuja, joissa a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

Osoita pitäen edellämainittua tunnettuna, että ko. yhtälöllä ei myöskään ole ratkaisuja, joissa a, b, c ovat positiivisia rationaalilukuja.

3. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus: On olemassa positiiviset kokonaisluvut $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$, joille

$$(\frac{p_1}{q_1})^{10} + (\frac{p_2}{q_2})^{10} = (\frac{p_3}{q_3})^{10}.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain luvulla $(q_1q_2q_3)^{10}$. Saadaan

$$(q_2q_3p_1)^{10} + (q_1q_3p_2)^{10} = (q_1q_2p_3)^{10}.$$

Mutta nyt valinnalla $a = q_2q_3p_1$, $b = q_1q_3p_2$, $c = q_1q_2p_3$ saadaan yhtälön

$$a^{10} + b^{10} = c^{10}$$

kokonaislukuratkaisu, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

4. Olkoon A viiden tason pisteen joukko. Osoita, että on olemassa joukon A osajoukko B, jolle joukkoa B voidaan siirtää tasossa yhdistelmällä siirtoja (translaatioita) ja kiertoja (rotaatioita) niin, että syntyvä joukko (A:n ja siirretyn B:n yhdiste) on symmetrinen jonkun suoran suhteen.

4. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että A:n pisteistä voidaan valita kolme, jotka ovat tasakylkisen kolmion kärjet. Olkoon ℓ suora, jonka suhteen kyseinen tasakylkinen kolmio on symmetrinen. Nyt kaksi jäljelläolevaa A:n pistettä voidaan siirtää vaaditusti suoralle ℓ.

Oletetaan sitten, että kolme A:n pistettä ovat samalla suoralla. Nyt kaksi muuta pistettä voidaan siirtää vaaditusti kyseiselle suoralle.

Oletetaan sitten, että kumpikaan edellämainituista tapauksista ei päde. Olkoon d, e joukon A pisteet, joiden välinen etäisyys on pisin, ja olkoon a, b, c muut pisteet. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että a:n ja b:n välinen etäisyys on pisin näistä kolmesta pisteestä ja b:n ja c:n välinen lyhyin. Olkoon ℓ sivun ab keskinormaali. Piste d voidaan siirtää niin, että puolisuunnikas $aecb$ on symmetrinen suoran ℓ suhteen, ja piste e voidaan siirtää vaaditusti suoralle ℓ.

5. Olkoon $k_1, \ldots, k_n$ suorakulmion muotoisia, keskenään samanlaisia kartonkipaloja. Kaikki nämä leikataan neliön muotoisiksi paloiksi, joiden koko voi riippua valitusta kartonkipalasta. Jokainen kartonkipala kuitenkin leikataan keskenään samankokoisiksi neliöiksi.

Näin saatujen neliöiden yhteismäärä on alkuluku.

Osoita, että kartonkipalat $k_1, \ldots, k_n$ ovat neliön muotoisia.

5. tehtävän ratkaisu: Olkoon r kartonkipalan pitkän ja lyhyen sivun pituuksien suhde. Koska kartonkipalat saa pilkottua neliöiksi, r on rationaaliluku.

Olkoon a_i se, kuinka monen leikatun neliön sivu on osa kartonkipalan k_i lyhyttä sivua, ja b_i vastaavasti pitkälle sivulle. Olkoon $r = \frac{b}{a}$ sievennetyssä muodossa. Nyt $a|a_i$ ja $b|b_i$ kaikilla i. Siis $ab|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, missä oikea puoli on neliöiden yhteismäärä eli alkuluku. Siis $a = b = 1$, eli $r = 1$.

6. Tutkitaan yhtälöitä

$$(x-a)(x-b) = x-c$$
$$(x-b)(x-c) = x-a$$
$$(x-c)(x-a) = x-b,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Osoita, että vähintään kahdella näistä yhtälöstä on ratkaisut.

6. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että yhtälöllä

$$(x-a)(x-b) = x-c$$

ei ole ratkaisua.

Koska vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja oikea puoli saa mielivaltaisen pieniä arvoja, on oltava

$$(x-a)(x-b) > x-c$$

vähintään yhdellä x. Koska funktio $x \mapsto (x-a)(x-b) - (x-c)$ ei voi vaihtaa merkkiään kulkematta nollan kautta, on epäyhtälön

$$(x-a)(x-b) > x-c$$

pädettävä kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Symmetrian perusteella sama pätee kaikille tehtävänannon epäyhtälöistä, joilla ei ole ratkaisuja.

Tehdään vastaoletus, että yhtälöiden joukossa on kaksi, joilla ei ole ratkaisuja. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että ne ovat kaksi ensimmäistä. Siis pätee

$$(x-a)(x-b) > x-c$$

$$(x-b)(x-c) > x-a.$$

Sijoittamalla ensimmäiseen $x = a$ saadaan $0 > a - c$. Sijoittamalla jälkimmäiseen $x = c$ saadaan $0 > c - a$ eli $a - c < 0$. Ristiriita.

7. Tutkitaan yhtälöä

$$x^2 + ax + b = 0,$$

Missä $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Oletetaan, että tällä on reaaliset juuret x_1, x_2, missä $x_2 \notin [-1, 1]$. Osoita, että $x_1 \in [-|b|, |b|]$.

7. tehtävän ratkaisu: Koska $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + b$, pätee $x_1 x_2 = b$, mistä saadaan $|x_1| = \frac{|b|}{|x_2|} < |b|$.

8. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ ääretön jono positiivisia kokonaislukuja ja $p_1, p_2, \ldots$ ääretön jono alkulukuja, jossa mikään luku ei toistu kahdesti ja $p_i | a_i$ kaikilla i.

Lisäksi oletetaan, että $a_{i+1} - a_i = p_{i+1} - p_i$ kaikilla i.

Osoita, että jono $a_1, a_2, \ldots$ koostuu alkuluvuista.

8. tehtävän ratkaisu: Tehtävänannon yhtälö saadaan muotoon $a_{i+1} - p_{i+1} = a_i - p_i$, mistä saadaan induktiolla $a_i - p_i = a_1 - p_1$ kaikilla i. Merkitään $a_1 - p_1 = c$.

Tehdään vastaoletus, että jonossa $a_1, a_2, \ldots$ on jäsen a_{i_0}, joka ei ole alkuluku. Tällöin $a_{i_0} - p_{i_0} > 0$, mistä saadaan $c > 0$.

Koska jonossa $p_1, p_2, \ldots$ mikään luku ei toistu, se sisältää mielivaltaisen suuria alkulukuja, ja voidaan valita i_1, jolle $p_{i_1} > c$. Koska a_{i_1} on luvun p_{i_1} monikerta, $a_{i_1} - p_{i_1} \geq p_{i_1} > c$, ristiriita.

9. Oletetaan, että

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1.$$

Osoita, että $x + y = 0$.

9. tehtävän ratkaisu: Nyt

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}}.$$

Laventamalla oikea puoli luvulla $\sqrt{y^2 + 1} - y$ saadaan

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1} - y,$$

mistä saadaan

$$x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Vaihtamalla x:n ja y:n roolit ja käymällä sama argumentti läpi saadaan

$$x + y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}.$$

Siis $(x + y) = -(x + y)$, mikä on mahdollista vain, jos $x + y = 0$.

10. Olkoon V suunnattu verkko, jossa solmujen joukko on äärellinen. Oletetaan, että seuraavat pätevät:

1. Kaikilla solmupareilla s, s' on kaari joko solmusta s solmuun s' tai solmusta s' solmuun s. (Tästä seuraa valinnalla $s = s'$, että jokaisesta solmusta on kaari itseensä.)

2. Kaikilla solmukolmikoilla s, s', s'' pätee seuraava: Jos solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s'', niin myös solmusta s lähtee kaari solmuun s''.

Osoita, että verkossa V on solmu s, josta lähtee kaari jokaiseen verkon V solmuun.

10. tehtävän ratkaisu: Olkoon V kuten tehtävänannossa.

Induktio-oletus: Kaikilla V:n solmujen joukon osajoukoilla V', joissa on k solmua, pätee, että V':ssa on solmu s, josta lähtee kaari jokaiseen V':n solmuun.

Todistus: Olkoon $k = 1$ ja V' yhden solmun joukko, olkoon tämä solmu s. Ehdon (1) perusteella s:stä on kaari itseensä, joten induktio-oletus pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan, että väite pätee luvulle k. Olkoon V' joukko, jossa on $k + 1$ solmua. Olkoon $s \in V'$, ja $V'' = V' \setminus s$. Induktio-oletuksen nojalla V'':ssa on solmu s', josta lähtee kaari jokaiseen V'':n solmuun. Jos s':sta lähtee kaari solmuun s, indktio valmis.

Jos taas s:stä lähtee kaari s':uun, ehdon (2) perusteella s:stä lähtee kaari kaikkiin V'':n solmuihin, ja siis induktio on valmis.

Jos V:ssä on n solmua, äsken todistetun perusteella valinnalla $k = n$ saadaan tehtävänannon väite.

Vaikeampia tehtäviä

11. Numeroidut kortit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sekoitetaan ja jaetaan tasan kahdelle pelaajalle A ja B, näiden käsikorteiksi.

Tikki pelataan seuraavasti: Tikin aloittaja lyö kädestään valitsemansa kortin pöytään kuvapuoli ylöspäin. Tämän jälkeen toinen pelaaja lyö kädestään valitsemansa kortin pöytään kuvapuoli ylöspäin. Korkeamman kortin lyönyt voittaa tikin.

Pelissä kaikki käsikortit pelataan peräkkäisiin tikkeihin. A aloittaa ensimmäisen tikin, ja myöhemmissä tikeissä aloittaa aina edellisen tikin voittaja. Enemmän tikkejä voittanut voittaa pelin.

Osoita, että on olemassa pelin alkuasetelma (kortit jaettu) niin, että kumpikin seuraavista ehdoista pätee:

- B:lla on voittostrategia.
- A:lla on "älytyskortti": Jos hän aloittaa ensimmäisen tikin sillä ja B erehtyy voittamaan kyseisen tikin (millä tahansa voittavalla kortilla), A:lla on tämän jälkeen voittostrategia.

11. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että A:n kortit ovat $2, 4, 5$. Tällöin B:llä on kortit $1, 3, 6$.

Oletetaan, että A aloittaa viitosella.

Jos B lyö ensimmäiseen tikkiin kuutosen, B joutuu jatkossa lyömään korteista $1, 3$ kortteja $2, 4$ vastaan. A ottaa seuraavan tikin pienimmällä voittavalla kortilla ja voittaa myös viimeisen tikin. Siis A voittaa kaksi tikkiä ja pelin.

Jos taas B lyö ykkösen ensimmäiseen tikkiin, A:lla on ensimmäisen tikin jälkeen $2, 4$ ja B:llä $3, 6$. B voittaa kaksi seuraavaa tikkiä, jos hän ottaa seuraavan tikin pienimmällä voittavalla kortilla.

Jos A aloittaa nelosella, tilanne sama kuin edellä.

Jos A aloittaa kakkosella, B voittaa sen kolmosella, ja hän voittaa vielä myöhemmän tikin kuutosella. Siis B voittaa vähintään kaksi tikkiä.

12. On numeroidut kortit 1-100. Suurempi kortti lyö aina pienemmän, paitsi että ykkönen lyö sadan.

Kortit on kuvapuoli alaspäin pöydällä. Pöydän ääressä on kaksi henkilöä: Tiedottaja ja vastaanottaja. Tiedottaja tietää, missä mikin kortti on.

Tiedottaja antaa vastaanottajalle tiedonantoja seuraavasti: Hän osoittaa kahta korttia pöydällä ja kertoo, kumpi niistä lyö kumman.

Osoita, että tiedottaja voi sadalla valitsemallaan tiedonannolla viestiä vastaanottajalle jokaisen kortin sijainnin.

12. tehtävän ratkaisu: Merkitään $i < j$ tiedonantoa, että j lyö i:n.

Nyt tiedonannot ovat $1 < 3$, $3 < 100$, $100 < 1$, $2 < 3 < \cdots < 99$. Osoitetaan, että nämä kertovat korttien sijainnit.

Silmukkaa $i < j, j < k, k < i$ ei pysty syntymään, elleivät 1 ja 100 ole silmukkakorttien joukossa. Näin ollen kolmen ensimmäisen tiedonannon jälkeen vastaanottaja tietää kolme korttia, joiden joukossa ykkönen ja sata ovat. On vain yksi kortti, jonka ykkönen lyö ja yksi kortti, joka lyö sadan. Koska kolmosen tiedotetaan lyövän kaksi korttia ja häviävän kahdelle kortille, tiedonannot paljastavat ykkösen ja sadan täsmälleen.

Kun ykkönen ja sata ovat tiedossa, on vain yksi mahdollinen muiden 98 kortin jono, joka toteuttaa tiedonannot $2 < 3 < \cdots < 99$. Siis tiedonannot paljastavat kortit täsmälleen.

13. Olkoon ABC kolmio, jossa kulma $\angle BAC$ on suora. Olkoon D sivun AB keskipiste, E sivun BC keskipiste ja F sivun AC keskipiste. Pisteiden D, E ja F kautta piirretään ympyrä S.

Osoita, että S kulkee myös pisteen A ja kolmion sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapisteen G kautta.

13. tehtävän ratkaisu: Piirretään ympyrä S' pisteiden D, F ja A kautta. Koska $\angle DAF$ on suora, DF on ympyrän S' halkaisija, ja S':n keskipiste O on janan DF keskipiste.

Koska kolmio ADF on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa, mutta siinä pituudet ovat puolet kolmion ABC pituuksista, G sijaitsee symmetrisesti pisteen A kanssa suoran DF suhteen. Siis G sijaitsee ympyrällä S'

Nyt jana AO on puolet janasta AE, ja siis janat AO ja OE ovat yhtä pitkiä. Koska A sijaitsee ympyrällä S', myös E sijaitsee ympyrällä S'.

Koska pisteiden D, E, F kautta voidaan piirtää vain yksi ympyrä, $S = S'$.

14. Olkoon V suunnattu verkko, jossa solmujen joukko on äärellinen. Oletetaan, että seuraavat pätevät:

1. Ei ole solmuja s, s' niin, että sekä solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s. (Valitsemalla $s = s'$ saadaan tulos, että mistään solmusta ei ole kaarta itseensä.)

2. Kaikilla solmukolmikoilla s, s', s'' pätee seuraava: Jos solmusta s lähtee kaari solmuun s' ja solmusta s' lähtee kaari solmuun s'', niin myös solmusta s lähtee kaari solmuun s''.

Osoita, että verkossa V on solmu s, josta ei lähde kaarta mihinkään verkon V solmuun.

14. tehtävän ratkaisu: Olkoon V kuten tehtävänannossa.

Induktio-oletus: Kaikilla V:n solmujen joukon osajoukoilla V', joissa on k solmua, pätee, että V':ssa on solmu s, josta ei lähde kaarta mihinkään V':n solmuun.

Todistus: Olkoon $k = 1$ ja V' yhden solmun joukko, olkoon tämä solmu s. Ehdon (1) perusteella s:stä ei ole kaarta itseensä, joten induktio-oletus pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan, että väite pätee luvulla k. Olkoon V' joukko, jossa on $k+1$ solmua. Olkoon $s \in V'$, ja $V'' = V' \setminus s$. Jos s:stä ei lähde kaarta mihinkään V'':n solmuun, induktio valmis.

Induktio-oletuksen nojalla V'':ssa on solmu s', josta ei lähde kaarta mihinkään V'':n solmuun. Jos s':sta ei lähde kaarta solmuun s, induktio valmis.

Oletetaan sitten, että s':sta lähtee kaari solmuun s ja s:stä lähtee kaari johonkin V'':n solmuun s''. Nyt ehdon (2) perusteella s':sta lähtee kaari solmuun s'', mikä on ristiriidassa induktio-oletuksen kanssa. Induktio valmis.

Jos V:ssä on n solmua, äsken todistetun perusteella valinnalla $k = n$ saadaan tehtävänannon väite.

15. Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot

- $f(nm) = f(n)f(m)$ kaikilla n, m.
- Jos $n > m$ niin $f(n) > f(m)$.
- $f(3) \geq 7$.

Mikä on pienin arvo, jonka $f(3)$ voi saada?

15. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Pienin arvo on 9.

Nähdään välittömästi, että funktio $f(n) = n^2$ toteuttaa tehtävänannon ehdot ja ehdon $f(3) = 9$.

Osoitetaan sitten, että pienempää arvoa ei saavuteta. Tehdään vastaoletus, että $f(3) = 7$ tai $f(3) = 8$.

Jos $f(2) = 2$, pätee $f(4) = 4$, ja ehto $f(3) < (4)$ ei toteudu. Siis $f(2) \geq 3$.

Jos $f(2) \geq 4$, $f(8) \geq 64$, mutta $f(9) \leq 64$. Siis $f(2) = 3$.

Nyt kuitenkin pitäisi päteä $f(27) < f(32)$. Vasen puoli on kuitenkin vähintään $7^3 = 373$, mutta oikea puoli on $3^5 = 243$. Ristiriita.

16. Olkoon $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{N}$. Osoita, että yhtälöllä

$$x^2 + 2(a_1 + \ldots, a_5)^2 x + (a_1^4 + \cdots + a_5^4 + 1) = 0$$

ei ole kokonaislukuratkaisuja.

16. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että yhtälöllä on kokonaislukuratkaisu. Tällöin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan, että

$$\frac{\Delta}{4} = (a_1 + \cdots + a_5)^4 - (a_1^4 + \cdots + a_5^4 + 1)$$

on neliöluku.

Käymällä vaihtoehdot läpi havaitaan, että neliöt ovat $\equiv 0, 1$ tai $4 \mod 8$ ja neljännet potenssit $\equiv 0$ tai $1 \mod 8$.

Siis $(a_1 + \cdots + a_5)^4 \equiv 0$ tai $1 \mod 8$, ja $(a_1^4 + \ldots a_5^4 + 1) \equiv 1, 2, 3, 4, 5$ tai $6 \mod 8$.

Nyt kuitenkin $\frac{\Delta}{4}$ on pariton, joten vastaoletuksesta seuraa $\frac{\Delta}{4} \equiv 1 \mod 8$, mikä on mahdotonta edellisen kappaleen tarkastelujen perusteella.

17. Olkoon a, b, c jonkun kolmion sivujen pituudet, ja olkoon $P(x)$ astetta n, $n \geq 2$, oleva polynomi, jonka kaikki kertoimet ovat positiivisia.

Osoita, että $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$, $\sqrt[n]{P(c)}$ ovat jonkun kolmion sivujen pituudet.

17. tehtävän ratkaisu: Voidaan olettaa $a \leq b \leq c$. Tiedetään, että $c < a + b$. Koska $P(x)$:n kertoimet ovat positiivisia, $x \mapsto P(x)$ on kasvava funktio, ja siis $\sqrt[n]{P(a)} \leq \sqrt[n]{P(b)} \leq \sqrt[n]{P(c)}$.

Siis on osoitettava $\sqrt[n]{P(c)} < \sqrt[n]{P(a)} + \sqrt[n]{P(b)}$.

Olkoon $P(x) = \sum p_i x^i$, ja merkitään $Q(x) = \frac{P(x)}{x^n} = \sum p_i x^{i-n}$. Koska kaikki eksponentit ovat ei-positiivisia, $x \mapsto Q(x)$ on vähenevä funktio.

Nyt

$$\sqrt[n]{P(c)} = c\sqrt[n]{Q(c)} < a\sqrt[n]{Q(c)} + b\sqrt{Q(c)} \leq a\sqrt[n]{Q(a)} + b\sqrt{Q(b)} = \sqrt[n]{P(a)} + \sqrt[n]{P(b)}.$$

18. Sanomme, että positiivinen kokonaisluku on pitkäseiskainen, jos sen kymmenjärjestelmäesitys koostuu numeroista $1, 2, \ldots, 7$, ja jokainen näistä esiintyy kymmenjärjestelmäesityksessä täsmälleen 10 kertaa.

Osoita, että mikään pitkäseiskainen luku ei ole jaollinen toisella pitkäseiskaisella luvulla.

18. tehtävän ratkaisu: Olkoon a positiivinen pitkäseiskainen luku. nyt $a \equiv 10(1 + 2 + \cdots + 7) \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 9$.

Tehdään vastaoletus: Olkoon a ja b pitkäseiskaisia lukuja ja b jaollinen luvulla a. Nyt $b = ka$, missä $2 \leq k \leq 7$. Siis $b = ka \equiv k \mod 9$, mikä on ristiriita sen kanssa, että $b \equiv 1 \mod 9$.

19. Olkoon $P(n)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolle $P(P(n) + n)$ on alkuluku äärettömän monella kokonaisluvulla n.

Osoita, että $P(n)$ on nollatta tai ensimmäistä astetta.

19. tehtävän ratkaisu: Oletetaan tunnetuksi, että jos Q on kokonaislukukertoiminen polynomi ja x, y ovat kokonaislukuja, $x - y | Q(x) - Q(y)$. (Tämän todistaminen ei ole vaikeaa. Se seuraa siitä, että $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1})$ kaikilla k.)

Valitaan edellä $x = P(n) + n, y = n, Q(n) = P(n)$. Saadaan $P(n)|P(P(n) + n) - P(n)$ kaikilla n, eli $P(n)|P(P(n) + n)$ kaikilla n.

Koska $P(P(n) + n)$ on alkuluku äärettömän monella n, joko $P(n) = \pm 1$ äärettömän monella n tai $P(n) = \pm P(P(n) + n)$ äärettömän monella n.

Ensimmäisessä tapauksessa $P(n) \pm 1$:lla on äärettömän monta nollakohtaa, joten se on nollapolynomi, ja P on vakiopolynomi. Todistus on valmis.

Oletetaan $P(n) = \pm P(P(n) + n)$ äärettömän monella n. Koska $\pm P(P(n) + n) - P(n)$ on polynomi, jolla on äärettömän monta nollakohtaa, se on nollapolynomi. Siis polynomit $\pm P(P(n) + n)$ ja $P(n)$ ovat samat. Jos P:n aste d on vähintään 2, $P(P(n) + n)$:n aste on d^2, ristiriita.

20. Olkoon p pariton alkuluku. Sanomme, että jono $a_1, \ldots, a_p$ luonnollisia lukuja on hyvä, jos

- $a_i < p$.
- $a_1 + \cdots + a_p$ ei ole jaollinen luvulla p.
- $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ on jaollinen luvulla p.

Määritä kaikkien hyvien jonojen lukumäärä.

20. tehtävän ratkaisu: Sanomme, että jono $a_1, \ldots, a_n$ on i, j-hyvä, $0 \leq i < p$, $0 < j < p$, jos se toteuttaa ensimmäisen tehtävänannon ehdon, ja lisäksi ehdot

$$a_1 + \cdots + a_p \equiv j \mod p$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1 \equiv i \mod p.$$

Olkoon $a_1, \ldots, a_n$ jono, joka on i, j-hyvä. Tutkitaan jonoa $a_1 + c, \ldots, a_n + c$, missä $c \in \mathbb{Z}$. Selvästi jono on i', j-hyvä jollain i', kun jonon jäsenistä vähennetään sopivia p:n monikertoja.

Nyt

$$(a_1 + c)(a_2 + c) + \cdots + (a_p + c)(a_1 + c) = i + 2c(a_1 + \cdots + a_n) + pc^2.$$

Jos $k \in \mathbb{N}$ on annettu voidaan valita c niin, että luku $2c(a_1 + \cdots + a_n) \equiv k \mod p$, koska p on alkuluku. Lisäksi k riippuu luvusta j, muttei muuten jonosta $a_1, \ldots, a_n$.

Jos siis i, i', j on annettu, on olemassa injektio i, j hyvien jonojen joukolta i', j-hyvien jonojen joukolle. Vastaavalla argumentilla löytyy injektio i', j-hyvien jonojen joukolta i, j-hyvien jonojen joukolle. Siis i, j-hyviä jonoja on yhtä paljon kuin i', j-hyviä jonoja.

Sanomme, että jono on i-hyvä, jos se on i, j-hyvä jollain i. Koska i, j-hyviä jonoja on yhtä paljon kuin i', j-hyviä jonoja kaikilla j, myös i-hyviä jonoja on yhtä paljon kuin i'-hyviä jonoja. Sanomme, että jono on semihyvä, jos se on i-hyvä jollain i.

Semihyviä jonoja on $p^{p-1}(p-1)$. Siis 0-hyviä eli hyviä jonoja $p^{p-2}(p-1)$.