Helmikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 9.4.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on "liian pitkä intuitiohyppy" on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Määritellään $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $f(0) = 2$ ja induktiivisesti $f(n+1) = 2^{f(n)}$.
Määritä pienin n, jolle luvun $f(n)$ kymmenjärjestelmäesityksessä on yli 10000 numeroa.

1. tehtävän ratkaisu: <u>**Vastaus:** Vastaus on $n = 4$.</u> Lasketaan:

$$f(0) = 2.$$
$$f(1) = 4.$$
$$f(2) = 16.$$
$$f(3) = 65536.$$
$$f(4) = 2^{65536} > (2^4)^{10000} > 10^{10000}.$$

Nyt $n = 4$ kelpaa ratkaisuksi, koska luvun 10^{10000} kymmenjärjestelmäesityksessä on 10001 numeroa.

2. Olkoon r irrationaaliluku ja q_1, q_2 rationaalilukuja, missä $q_2 \neq 0$. Osoita, että $q_1 + q_2 r$ ja $q_1 + q_2 \frac{1}{r}$ ovat myös irrationaalilukuja.

2. tehtävän ratkaisu: Olkoon r, q_1, q_2 kuten tehtävänannossa.

Kirjoitetaan $q_1 + q_2 r = x$, mistä voidaan ratkaista $r = \frac{x - q_1}{q_2}$. Jos x voitaisiin kirjoittaa kahden kokonaisluvun osamääränä $x = \frac{a}{b}$, myös r voitaisiin kirjoittaa

$$r = \frac{\frac{a}{b} - q_1}{q_2},$$

mikä on rationaalilukujen peruslaskutoimitusten tuloksena rationaaliluku.

Jos $\frac{1}{r}$ olisi rationaaliluku, se voitaisiin kirjoittaa kahden kokonaisluvun osamääränä $\frac{a}{b}$, mutta tällöin $r = \frac{b}{a}$ olisi myös rationaaliluku.

Siis $\frac{1}{r}$ on irrationaaliluku, ja tehtävän loppuosa saadaan soveltamalla tehtävän alkuosaa lukuihin $\frac{1}{r}, q_1, q_2$.

3. Eräässä maassa on joukko K kaupunkeja. Kaupunkien välillä kulkee yksisuuntaisia lentoja (Jos a:sta b:hen kulkee lento, b:stä a:han voi kulkea lento tai olla kulkematta). Sanomme, että kaupunki b on saavutettavissa kaupungista a, jos a:sta b:hen voi lentää mahdollisesti vaihtaen lentoa useaankin kertaan. (Määritellään myös, että jokainen kaupunki on saavutettavissa itsestään käsin.)

Jos a ja b ovat mitä tahansa kaupunkeja, on olemassa kaupunki c, jolle sekä a että b ovat saavutettavissa c:stä.

Osoita, että on olemassa kaupunki c_0, jolle kaikki kaupungit ovat saavutettavissa c_0:sta.

3. tehtävän ratkaisu: Olkoon c_0 kaupunki, josta pystyy saavuttamaan suurimman määrän kaupunkeja. Väitämme, että c_0 on tehtävässä kysytty kaupunki.

Tehdään vastaoletus: On olemassa kaupunki a, jota ei voi saavuttaa c_0:sta. Mutta nyt on olemassa kaupunki b, josta voi saavuttaa sekä a:n että c_0:n. Koska saavutettavuus on transitiivinen relaatio, b:stä voi saavuttaa kaikki ne kaupungit, jotka voi saavuttaa c_0:sta. Siis b:stä voi saavuttaa enemmän kaupunkeja kuin c_0:sta. Ristiriita.

4. Ympyrät S ja T leikkaavat toisensa pisteissä P ja Q. Pisteen P kautta piirretään suorat s_1 ja s_2. Suora s_1 leikkaa ympyrän S pisteessä A_1 ja ympyrän T pisteessä B_1. Lisäksi suoralla s_1 piste P on pisteiden A_1 ja B_1 välissä. Suora s_2 leikkaa ympyrän S pisteessä A_2 ja ympyrän T pisteessä B_2. Lisäksi suoralla s_2 piste P on pisteiden A_2 ja B_2 välissä.

Osoita, että kolmiot A_1B_1Q ja A_2B_2Q ovat yhdenmuotoisia.

4. tehtävän ratkaisu: Kehäkulmalauseen nojalla kulmat PA_1Q ja PA_2Q ovat keskenään yhtäsuuria, samoin PB_1Q ja PB_2Q. Mutta nyt kolmioilla A_1B_1Q ja A_2B_2Q on kaksi paria keskenään yhtäsuuria kulmia, joten ne ovat yhdenmuotoisia.

5. Todista, että lävistäjät jakavat suunnikkaan neljään pinta-alaltaan yhtäsuureen osaan.

5. tehtävän ratkaisu: Olkoon $ABCD$ suunnikas, ja P sen lävistäjien leikkauspiste. 180 asteen kierto P:n ympäri vie suunnikkaan itselleen, joten osat ABP ja CDP ovat keskenään yhtäsuuria. Samoin osat BCP ja DAP. Lisäksi P jakaa kummankin lävistäjän kahteen yhtä pitkään osaan.

Siis riittää todistaa, että ABP ja BCP ovat keskenään yhtä suuria. Piirretään pisteestä B janalle AC normaali, olkoon d tämän pituus. Nyt ABP:n ala on $\frac{1}{2}|AP|h$, ja BCP:n ala $\frac{1}{2}|PC|h$. Koska AP ja PC ovat kumpikin puolet lävistäjästä AC, em. pinta-alat ovat yhtä suuret.

6. Olkoon ABC tasakylkinen kolmio, jossa AB on kanta. Janalta AB valitaan piste P, ja P:stä piirretään normaalit N_A ja N_B sivuille AC ja BC.

Osoita, että pituus $|PN_A| + |PN_B|$ ei riipu pisteen P valinnasta. $|\cdot|$ merkitsee janan pituutta.

6. tehtävän ratkaisu: Kolmion ABC ala voidaan kirjoittaa $\frac{1}{2}|AC||PN_A| + \frac{1}{2}|BC||PN_B| = \frac{1}{2}|AC|(|PN_A| + |PN_B|)$. Koska kolmion ABC ala ei luonnollisesti riipu pisteen P valinnasta eikä myöskään $\frac{1}{2}|AC|$ riipu siitä, myöskään $(|PN_A| + |PN_B|)$ ei riipu pisteen P valinnasta.

7. (a) Onko mahdollista valita tasosta 10 punaista, 10 sinistä ja 10 keltaista pistettä niin, että seuraavat pätevät:

- Kyseisten 30 pisteen joukosta ei voida valita kahta pisteparia niin, että kyseisten pisteparien keskinäiset etäisyydet olisivat samat.
- Jokaisen punaisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on sininen.
- Jokaisen sinisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on keltainen.
- Jokaisen keltaisen pisteen lähin naapuripiste (kyseisten 30 pisteen joukosta) on punainen.

(b) Entä jos edellisestä ensimmäinen ehto jätetään pois, ja kolmessa muussa ehdossa ei vaadita yksikäsitteisen lähimmän pisteen väriä, vaan jos pisteellä on useita yhtä läheisiä lähimpiä naapuripisteitä, riittää, että yksi niistä on vaadittua variä.

7. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** (a) Ei ole mahdollista.

Tehdään vastaoletus, tuollainen väritys on olemassa. Olkoon a, b pisteet, joiden keskinäinen etäisyys on pienin kaikista 30 pisteen pareista. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että a on punainen. Mutta nyt b on sininen. Kuitenkin b:n lähin naapuripiste on punainen eikä keltainen. Ristiriita.

Vastaus: (b) On mahdollista. Sijoitetaan pisteet tasavälein ympyrän kehälle niin, että niiden värit vaihtelevat ... punainen, sininen, keltainen, punainen, sininen, keltainen ...

8. Osoita, että jokainen kaksinumeroinen luku, joka on jaollinen numeroidensa summalla on myös jaollinen luvulla 10 tai luvulla 3.

8. tehtävän ratkaisu: Olkoon $a + 10b$ jaollinen luvulla $a + b$, muttei jaollinen luvulla 3.

Koska $a + b | a + 10b$, pätee $a + b | 9b$. Koska $a + b$ ei ole jaollinen luvulla 3, $a + b | b$. Mutta tästä seuraa $a = 0$, eli $a + 10b$ on jaollinen luvulla 10.

9. Taululla on n positiivista kokonaislukua, $n > 2$, joista jokainen on pienempi kuin $(n-1)!$. Paula muodostaa jokaiselle parille (a, b) ko. lukuja osamäärän a/b, missä isompi on jaettu pienemmällä ja pyöristetty alaspäin lähimpään kokonaislukuun.

Osoita, että osamäärien joukossa on kaksi, jotka ovat keskenään yhtäsuuria.

9. tehtävän ratkaisu: Olkoon alkuperäiset luvut $x_1, \ldots, x_n$ pienimmästä suurimpaan. Tehdään vastaoletus, että kaikki osamäärät ovat keskenään erisuuria. Nyt

$$\frac{x_n}{x_1} = \prod \frac{x_{i+1}}{x_i} \geq 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n - 1 = (n-1)!.$$

Mutta tästä seuraa $x_n \geq (n-1)!$, ristiriita.

Vaikeampia tehtäviä

10. 20 ystävystä osuu yhtaikaa ruokakaupan kassalle. Heillä on eri määrät ostoksia, joten heillä kestää eri aika asioida kassalla. (Oletamme, että tuo aika riippuu pelkästään ostosten määrästä.)

Ystävykset päättävät mennä kassalle sellaisessa järjestyksessä, että kaikkien henkilöiden odotusaikojen summa on pienin mahdollinen. Osoita, että pienin summa saavutetaan, kun ensin kassalle menee se, jolla on vähiten ostoksia, sitten se, jolla on toiseksi vähiten, sitten se, jolla on kolmanneksi vähiten jne.

10. tehtävän ratkaisu: Koska eri järjestyksiä, joissa ystävykset voivat mennä kassalle on äärellinen määrä, on olemassa järjestys, jossa odotusaikojen summa on pienin mahdollinen.

Tehdään vastaoletus: Pienin odotusaikojen summa saavutetaan jollain muulla järjestyksellä J.

Olkoon h_1 ja h_2 kaksi henkilöä, joille h_1:n asioimisaika a_1 on suurempi kuin h_2:n asioimisaika a_2, mutta järjestyksessä J henkilö h_1 menee kassalle ennen henkilöä h_2.

Muodostetaan järjestys J', joka on mutten sama kuin J, mutta henkilöiden h_1 ja h_2 paikat on vaihdettu keskenään. Olkoon s henkilöiden h_1 ja h_2 odotusaikojen summa järjestyksessä J. Nyt kyseinen summa järjestyksessä J' on $s - a_1 + a_2$, eli pienempi kuin s. Niiden osalta, jotka ovat järjestyksessä J ennen h_1:tä tai h_2:n jälkeen odotusaika ei muutu siirryttäessä järjestykseen J'. Niiden osalta, jotka ovat järjestyksessä J henkilöiden h_1 ja h_2 välissä, odotusaika vähenee $a_1 - a_2$:n verran.

Siis järjestyksessä J' odotusaikojen summa on pienempi kuin järjestyksessä J, ja vastaoletus on väärä.

11. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jossa kulma ABC on suora. Piirretään ympyrä S,joka kulkee ko. kolmion sivujen keskipisteiden kautta. Osoita, että myös piste B ja hypotenuusaa vasten piirretyn korkeusjanan kantapiste D ovat ympyrällä S.

11. tehtävän ratkaisu: Olkoon E hypotenuusan keskipiste, F kateetin AB keskipiste ja G kateetin BC keskipiste. Nyt $BFEG$ on suorakulmio, joten pisteiden F, E, G kautta piirretty ympyrä kulkee myös pisteen B kautta.

Jos BA ja BC ovat yhtä pitkiä, E on hypotenuusaa vastaan piirretyn korkeusjanan kantapiste ja tehtävä valmis.

Muussa tapauksessa voidaan symmetrian perusteella olettaa, että BC on pidempi kuin BA. Nyt kulmat BDE ja EGB ovat suoria kulmia, joten $BGED$ on jännenelikulmio, ja S kulkee myös pisteen D kautta.

12. Osoita, että on olemassa irrationaaliluku r, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- r^n on irrationaalinen kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.
- On olemassa positiiviset kokonaisluvut n, m, joilla $r^n + r^m$ on rationaaliluku.

12. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Luvuksi r kelpaa $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Kun r^n puretaan auki, on kahdenlaisia termejä: Niitä, joissa $\sqrt{2}$:n eksponentti on parillinen, ja jotka siis ovat rationaalilukuja. Ja sitten on niitä, joissa $\sqrt{2}$:n eksponentti on pariton, ja jotka siis ovat muotoa $q\sqrt{2}$, missä q on rationaalinen. Lisäksi nämä ovat joko kaikki positiivisia tai kaikki negatiivisia, koska $-\frac{1}{2}$:n eksponentti on kaikissa sama mod 2.

Siis $r^n = q_1 + q_2\sqrt{2}$, missä q_1 ja q_2 ovat ratinaalilukuja, ja q_2 on nollasta eroava. Siis r^n on irrationaaliluku.

Kun valitaan $n = 1, m = 2$, saadaan $r^n + r^m = \sqrt{2} - \frac{1}{2} + 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ eli rationaaliluku.

13. $2n + 1 \times 2n + 1$-ruudukosta osa ruuduista väritetään punaiseksi ja loput siniseksi. Sanomme, että ruudukossa rivi on punainen, jos sillä on enemmän punaisia kuin sinisiä ruutuja. Sanomme, että sarake on sininen, jos siinä on enemmän sinisiä kuin punaisia ruutuja.

Olkoon P punaisten rivien määrä ja S sinisten sarakkeiden määrä. Mikä on summan $S + P$ maksimiarvo?

13. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Maksimiarvo on $4n$. Osoitetaan ensin, että $S + P = 4n$ saavutetaan. Väritetään $n \times n$ -neliö ruudukon vasemmasta yläkulmasta punaiseksi. Väritetään $n \times n$ -neilö ruudukon oikeasta alakulmasta punaiseksi. Vastaavat neliöt ruudukon oikeasta yläkulmasta ja vasemmasta alakulmasta väritetään sinisiksi. Keskiruutua lukuunottamatta keskisarake väritetään punaiseksi ja keskirivi siniseksi. Keskiruutu voidaan värittää kummalla tahansa värillä. Keskiriviä lukuunottamatta kaikki rivit ovat punaisia ja keskisaraketta lukuunottamatta kaikki sarakkeet sinisiä. Siis $P + S = 4n$.

Osoitetaan sitten, että $P + S = 4n$ on maksimi. Tehdään vastaoletus, että jollain värityksellä $P + S = 4n + 1$. Joko kaikki rivit ovat punaisia tai kaikki sarakkeet sinisiä. Symmetrian perusteella oletetaan ensimmäinen, ja lisäksi kaikki paitsi yksi sarake on sinisiä. Koska punaisella rivillä on vähintään $n + 1$ punaista ruutua, punaisia ruutuja on yhteensä vähintään $(2n + 1)(n + 1)$. Vastaavasti sinisiä ruutuja on yhteensä vähintään $(2n)(n + 1)$. Mutta nyt ruutuja on yhteensä vähintään $2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 5n + 1$. Tämä luku on kuitenkin suurempi kuin ruutujen yhteismäärä $(2n^+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

14. Olkoon P, Q polynomeja, joiden kertoimet ovat luonnollisia lukuja (nolla on luonnollinen luku), ja on olemassa positiiviset kokonaisluvut $a \neq b$, joille $P(a) = Q(a)$ ja $P(b) = Q(b)$. Oletetaan, että kaikki P:n kertoimet ovat pienempiä kuin b. Osoita, että $P = Q$.

14. tehtävän ratkaisu: Kirjoitetaan $P(x) = \sum p_i x^i$ ja $Q(x) = \sum q_i x^i$. Merkitään $P(x) - Q(x) = (x - b)R(x)$,ja $R(x) = \sum r_i x_i$.

Oletetaan, että $r_i < 0$ jollain i. Nyt pätee $r_{i-1} - br_i = p_r - q_r < p_r < b$. Siis on pädettävä $r_{i-1} < 0$. Toistamalla argumentti r_{i-1}:lle jne. saadaan lopulta $r_0 < 0$. Mutta nyt edellinen epäyhtälö saa muodon $-br_0 < b$, mikä on ristiriita. Siis kaikki kertoimet r_i ovat ei-negatiivisia.

Mutta nyt $0 = P(a)-Q(a) = (a-b)R(a)$, joten $R(a) = 0$. Koska kaikki R:n kertoimet ovat ei-negatiivisia, seuraa tästä $R = 0$, ja siis $P = Q$.

15. Olkoon n_0 positiivinen kokonaisluku. Määritellään jono ääretön jono $n_0, n_1, n_2, \ldots$ seuraavasti: Jos n_i on jaollinen viidellä, $n_{i+1} = \frac{n_i}{5}$ (a-askel). Muutoin $n_{i+1} = \lfloor x\sqrt{5} \rfloor$ (b-askel).

Osoita, että jonossa on vain äärellinen määrä a-askelia-

15. tehtävän ratkaisu: Nähdään välittömästi,että kaikki n_i:t ovat positiivisia kokonaislukuja, joten näiden joukossa on pienin. Olkoon tämä indeksillä i_0. Tätä seuraa b-askel. Jos tätä b-askelta seuraa a-askel, $n_{i_0+2} < n_{i_0}$, ristiriita. Siis i_0:aa seuraa kaksi b-askelta.

Todistamme, että kaikki askeleet i_0:n jälkeen ovat b-askelia. Tämän osoittamiseksi riittää osoittaa, että kahta peräkkäistä b-askelta seuraa aina kolmas b-askel.

Olkoon siis i sellainen indeksi, että sitä seuraa kaksi b-askelta.

Nyt

$$\sqrt{5}n_i - 1 < g(n_i) < \sqrt{5}n_i,$$

mistä seuraa

$$\sqrt{5}(\sqrt{5}n_i - 1) - 1 < g(g(n_i) < \sqrt{5}(\sqrt{5}n_i).$$

Muokkaamalla reunimmaisia lausekkeita saadaan

$$5n_i - 4 < 5n_i - \sqrt{5} - 1 < g(g(n_i) < 5n_i.$$

Siis $g(g(n_i))$ ei ole viidellä jaollinen.

16. Olkoon $n_1, \ldots, n_{2000}$ jono kokonaislukuja niin, että jokainen $-1000 \leq n_i \leq 1000$, ja $\sum n_i = 1$.

Osoita, että on olemassa epätyhjä $I \subset \{0, 1, \ldots, 2000\}$, jolle $\sum_{i \in I} n_i = 0$.

16. tehtävän ratkaisu: Jos jokin $n_i = 0$ voidaan valita $I = \{i\}$. Jatkossa siis voidaan olettaa, että $n_i \neq 0$ kaikilla i.

Järjestetään luvut $n_1, \ldots, n_{2000}$ uudestaan jonoksi $a_1, \ldots, a_{2000}$ seuraavasti: Merkitään kaikilla i että $s_i = a_1 + \cdots + a_i$.

Valitaan $a_1 > 0$. Myöhemmillä askeleilla valitaan $a_{i+1} > 0$, jos $s_i < 0$ ja $a_{i+1} < 0$, jos $s_i > 0$. Koska $\sum n_i = 1$, näin voidaan tehdä.

Jos nyt $s_i = 0$ jollain i, joukoksi I voidaan valita lukujen $a_1, \ldots, a_i$ indeksit n-jonosta.

Muutoin jokainen s_i toteuttaa ehdot $-999 \leq s_i \leq 1000$, $s_i \neq 0$. Siis s_i:lle on vain 1999 mahdollista eri arvoa, ja voidaan valita $i_0 < i_1$, joille $s_{i_0} = s_{i_1}$. Mutta nyt I:ksi voidaan valita lukujen $a_{i_0+1}, \ldots, a_{i_1}$ indeksit n-jonosta.

17. Osoita, että yhtälöryhmällä

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

ei ole ratkaisuja positiivisten reaalilukujen joukossa.

17. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että $a \geq b \geq c \geq 0$. Todistetaan ensin, että $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Suuruusjärjestysepäyhtälön perusteella $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$. Koska $ab \geq ac \geq bc$ ja $c \leq b \leq a$, samoin suuruusjärjestysepäyhtälön perusteella $3abc = (ab)c+(ac)b+(bc)a \leq (ab)a+(ac)c+(bc)b = a^2b+b^2c+c^2a$. Siis $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Tehdään vastaoletus, että x, y, z on ratkaisu. Nyt

$$x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz = 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2.$$

Viimeinen askel on Tsebysevin epäyhtälö.

Jakamalla edellinen puolittain $(x+y+z)$:lla saadaan $1 \geq x+y+z$, mistä seuraa $x, y, z < 1$. Mutta nyt $x^3 < x$, $y^3 < y$, $z^3 < z$, eikä yhtälöllä

$$x+y+z = x^3+y^3+z^3$$

ole ratkaisua.

18. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ ei-negatiivisia reaalilukuja, joille $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{100}$.
Seuraavat pätevät:

- $x_1 + x_2 \leq 100$.
- $x_3 + \cdots + x_{100} \leq 100$.

Määritä suurin arvo summalle $x_1^2 + \cdots + x_{100}^2$.

18. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Maksimiarvo on 100^2.
Maksimiarvo saavutetaan, kun $x_1 = 100$, $x_i = 0$ muutoin.
Osoitetaan, että tämä on maksimi.

$$\begin{aligned}
x_1^2 + \cdots + x_{100}^2 &\leq (100-x_2)^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 \\
&= 100^2 - 200x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{100}^2 \\
&\leq 100^2 - (x_1 + \ldots, x_{100})x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{100}^2 \\
&= 100^2 + 2x_2^2 - x_2^2 - x_1x_2 + (x_3^2 - x_3x_2) + (x_4^2 - x_4x_2) + \cdots + (x_{100}^2 - x_{100}x_2) \\
&= 100^2 + (x_2 - x_1)x_2 + (x_3 - x_2)x_3 + (x_4 - x_2)x_4 + \cdots + (x_100 - x_2)x_100.
\end{aligned}$$

Viimeisessä kaavassa kaikki termit ensimmäistä lukuunottamatta ovat ei-positiisisia. Siis

$$x_1^2 + \ldots x_{100}^2 \leq 100^2.$$