Huhtikuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 28.5.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on ”liian pitkä intuitiohyppy” on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \ldots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Kaksinumeroisen luvun n numeroiden summa on 13. Kun luvusta vähennetään 27, siinä on samat numerot, mutta päinvastaisessa järjestyksessä.

Määritä n.

1. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Vastaus on $n = 85$.

Ehdosta, että numeroiden summa on 13 saadaan mahdollisuudet ovat $49, 58, 67, 76, 85, 94$. Koska "ennen"-luku on suurempi kuin "jälkeen"-luku, "ennen"-luvussa n on suurempi numero ensin.

Mahdollisuudet ovat siis $94, 85, 76$. Käymällä vaihtoehdot läpi löydetään vastaus $n = 85$.

2. Kun taso jaetaan ruutuihin kuten ruutupaperilla, sanotaan, että se on peitetty neliöillä. Samaan tapaan taso voidaan peittää myös tasasivuisilla kolmioilla tai säännöllisillä kuusikulmioilla. (Ts. jokainen tason piste on täsmälleen yhden monikulmion sisäpiste, täsmälleen kahden monikulmion sivulla tai useamman monikulmion kulmassa.)

Osoita, että tasoa ei voida peittää samaan tapaan muilla säännöllisillä monikulmioilla kuin edellämainituilla.

2. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että taso on peitetty monikulmioilla kuten tehtävänannossa on sanottu.

Jokaiseen tason pisteeseen, johon tulee jonkun monikulmion kulma, tulee n monikulmion kulmaa, $n \geq 3$. Näin ollen monikulmion sivujen välinen kulma on $\frac{360}{n}$. Viisikulmion sivujen välinen kulma ei ole tätä muotoa.

Myös jokaisen k-kulmion, $k > 6$, sivujen välinen kulma on suurempi kuin $\frac{360}{3}$, joten se ei ole em. muotoa.

3. Positiiviset reaaliluvut a, b, c, d toteuttavat $a + b + c + d \leq 40$. Määritä tulon $abcd$ suurin mahdollinen arvo.

3. tehtävän ratkaisu: Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla $\sqrt[4]{abcd} \leq 10$, ja yhtäsuuruus toteutuu, kun $a = b = c = d = 10$.

Selvästi $abcd$ saa maksiminsa, kun $\sqrt[4]{abcd}$ saa maksiminsa 10.

Siis lausekkeen $abcd$ maksimiarvo on $10^4 = 10000$.

4. Olkoon S ympyrä, O sen keskipiste ja P piste ympyrän ulkopuolella. Piirretään pisteestä P ympyrälle S tangentit ja ja pisteestä O tangenttien suuntaiset suorat. Olkoon A ja B tangenttien ja em. suorien leikkauspisteet.

Osoita, että nelikulmio $OAPB$ on neljäkäs.

4. tehtävän ratkaisu: Sivut AO ja PB ovat yhdensuuntaisia, samoin sivut BO ja PA.

Kulmat OPA ja POB ovat yhtäsuuria, samoin POA ja OPB. Koska kulmat OPA ja OPB ovat yhtäsuuria, myös kulmat OPB ja POB ovat yhtäsuuria, ja kolmio OPB on tasakylkinen kantanaan OP. Siis janat OB ja PB ovat yhtä pitkiä. Symmetrisellä argumentilla janat OA ja PA ovat yhtä pitkiä.

Koska kuvio on symmetrinen suoran OP suhteen, myös sivut OA ja OB ovat yhtä pitkiä, ja $OAPB$ on neljäkäs.

5. Joukon $S = \{-1, -2, \ldots, -2023\}$ jokaiselle epätyhjälle osajoukolle A muodostetaan A:n alkioiden tulo $\prod A$.

Mikä on kaikkien tulojen $\prod A$ summa?

5. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Tulojen summa on -1.

Olkoon A joukon S epätyhjä osajoukko, joka ei sisällä lukua -1, ja olkoon $B_A = A \cup \{-1\}$. Nyt $\prod A + \prod B_A = 0$.

Kysytty summa saadaan siis summana

$$\prod\{-1\} + \sum(\prod A + \prod B_A) = -1$$

, kun summassa läpikaydään epätyhjät joukot A, jotka eivät sisällä lukua -1.

6. Olkoon a ja b viitosen potensseja, $a \neq b$. Näiden kymmenjärjestelmäesitykset kirjoitetaan peräkkäin ja saadaan luku c.

Osoita, että c ei ole viitosen potenssi.

6. tehtävän ratkaisu: Nyt voidaan kirjoittaa $c = a + 10^n b$. Valitsemalla $b' = 5^n b$ voidaan kirjoittaa $c = a + 2^n b'$, missä a ja b' ovat viitosen potensseja.

Jos $a < b'$ saadaan $c = a(1 + 2^n \frac{b'}{a})$, missä suluissa oleva tekijä on summa luvusta, joka ei ole viidellä jaollinen ja viidellä jaollisesta luvusta. Siis suluissa oleva tekijä ei ole jaollinen viidellä, eli c ei ole viitosen potenssi..

Jos $b' < a$ saadaan $c = b'(\frac{a}{b'} + 2^n)$, eli c ei ole viitosen potenssi samasta syystä kuin edellä.

Vielä on jäljellä tapaus $a = b'$. Kirjoitetaan $a = b = 5^x$. Nyt $5^x \geq 10^{n-1}$, eli $2^{n-1} \leq 5$, eli $n \leq 3$. Toisaalta $a \leq 10^n$, mistä seuraa $x \leq 4$. Mahdolliset a, b-parit ovat siis $a = 5$, $b = 1$ ja $a = 25$, $b = 1$ ja $a = 125$, $b = 1$ ja a=625,b=5.

Nähdään, että vain valinnalla $a = 25$, $b = 1$, $c = 125$ saadaan c:ksi viitosen potenssi, eli tehtävänannossa on virhe.

7. Puolisuunnikaassa $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. Olkoon O lävistäjien leikkauspiste. Osoita, että kolmioilla ADO ja BCO on sama pinta-ala.

7. tehtävän ratkaisu: Puolisuunnikkaassa $\frac{|AO|}{|CO|} = \frac{|BO|}{|DO|}$ eli $|AO||DO| = |BO||CO|$.

Toisaalta kulmat AOD ja BOC ovat yhtä suuret.

Siis kolmioiden alat $\frac{1}{2}|AO||DO| \sin AOD$ ja $\frac{1}{2}|BO||CO|| \sin BOC$ ovat samat.

8. Luonnolliset luvut kirjoitetaan äärettömäksi kolmioksi kuten alla

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
...

Mikä on n:nnen rivin lukujen summa?

8. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** n:nnen rivin lukujen summa on $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Nyt n:nnellä rivillä ja sitä ennen on yhteensä $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ lukua.

Merkitään $f(n)$:llä näiden summaa $f(n) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} i$ eli

$$f(n) = \frac{\frac{n(n+1)}{2}(\frac{n(n+1)}{2} + 1)}{2} = \frac{(n(n+1))(n(n+1)+2)}{8}$$

.

Kysytty summa on siis

$$f(n) - f(n-1) = \frac{(n(n+1))(n(n+1)+2) - (n(n-1))(n(n-1)+2)}{8} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

9. Olkoon $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktiota, jotka toteuttavat $f(x + g(y)) = 2x + y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.
Määritä $g(x + f(y))$.

9. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** $g(x + f(y) = \frac{1}{2}x + y$.

Sijoituksella $y = 0$ saadaan $f(x + g(0)) = 2x$, ja sijoittamalla $x' = x + g(0)$ saadaan $f(x') = 2x' - 2g(0)$. Kun x käy läpi reaaliluvut, myös x' käy läpi reaaliluvut. Siis $f(x') = 2x' - 2g(0)$ pätee kaikilla x'.

Sijoittamalla alkuperäiseen kaavaan $x = 0$ saadaan $f(g(y)) = y$, ja sijoittamalla edellä saatu f:n kaava saadaan $2g(y) - 2g(0) = y$, eli $g(y) = \frac{1}{2}y + g(0)$.

Nyt $g(x + f(y)) = g(x + 2y - 2g(0)) = \frac{1}{2}(x + 2y - 2g(0)) + g(0) = \frac{1}{2}x + y$.

10. Kolmiossa on kaksi keskenään yhtä pitkää mediaania. Osoita, että kolmio on tasakylkinen.

10. tehtävän ratkaisu: Olkoon kolmio ABC, ja kärkien A, B ja C vastaisten sivujen keskipisteet D, E ja F. Olkoon O mediaanien leikkauspiste.

Oletetaan, että mediaanit AD ja BE ovat yhtä pitkät. Koska O jakaa kaikki mediaanit suhteessa $2:1$, myös AO ja BO ovat yhtä pitkät. Mutta nyt kolmio ABO on tasakylkinen, ja siis kulmat ABO ja BAO ovat yhtäsuuret.

Mutta nyt kolmiot ABE ja BAD ovat yhtenevät, joten janat BD ja AE ovat yhtä pitkät. Koska BD ja AE ovat puolet sivuista BC ja AC, nämä sivut ovat yhtä pitkät.

Vaikeampia tehtäviä

11. Olkoon x, y, z positiivisia reaalilukuja, joille $xy + yz + zx = 27$
Osoita, että

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

11. tehtävän ratkaisu: Purkamalla

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

auki ja käyttämällä järjestysepäyhtälöä nähdään, että ym. epäyhtälö pätee. Siis $x + y + z \geq 9$.
Aritmeettis-geometrisestä epäyhtälöstä saadaan

$$xy + yz + xz \geq 3(xyz)^{\frac{2}{3}},$$

eli $27^3 \geq 27(xyz)^2$. Siis $xyz \leq 27$, eli $\sqrt{3xyz} \leq 9$.

12. Olkoon p luonnollinen luku. Oletetaan, että luvut $p, 3p + 2, 7p + 6, 9p + 8, 11p + 10$ ovat alkulukuja.
Osoita, että $6p + 11$ pn yhdistetty luku.

12. tehtävän ratkaisu: Koska $3p + 2$ on alkuluku, se ei ole viidellä jaollinen, ja siis $p \not\equiv 1 \mod 5$.
Koska $7p + 6$ on alkuluku, se ei ole viidellä jaollinen,ja siis $p \not\equiv 2 \mod 5$.
Koska $9p + 8$ on alkuluku, se ei ole viidellä jaollinen, ja siis $p \not\equiv 3 \mod 5$.
Jos p on viidellä jaollinen, $p = 5$, jolloin $11p + 10 = 65$ ei ole alkuluku.
Siis $p \equiv 4 \mod 5$. Tällöin $6p + 11 \equiv 0 \mod 5$, eli se on yhdistetty luku.

13. Ympyrän kehälle on kirjoitettu n reaalilukua, jokainen välillä $[0, 1]$. Lisäksi jokainen luku on kahden sitä myötäpäiväisessä kiertosuunnassa edeltävän luvun erotuksen itseisarvo.
Olkoon n annettu. Määrää ympyrän kehällä olevien lukujen summan maksimiarvo.

13. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Vastaus on $\frac{2n}{3}$.
Olkoon a, b kaksi peräkkäistä lukua ympyrän kehällä, b myötäpäivään seuraava a:sta.
Väitämme, että jokainen luku c ympyrän kehällä on pienempi kuin $\max(a, b)$. Oletetaan induktio-oletuksena, että tämä pätee (myötäpäiväiseen kiertosuuntaan) kaikille b:n ja c:n välissä oleville luvuille.
Olkoon c', c'' lukua c edeltävät luvut. Nyt $c = |c' - c''| \leq \max(c', c'') \leq \max(a, b)$. Induktio valmis.
Tästä seuraa, että mistä tahansa kahdesta toisiaan seuraavasta luvusta toinen on koko ympyrän maksimiarvo. Oletetaan että ympyrän kehällä on luku m', joka ei ole koko ympyrän maksimiarvo m eikä nolla. Tällöin m':a seuraava luku on muotoa $|x - m'|$, missä $x \in [0, m]$. Siis kyseinen seuraava luku ei ole maksimiarvo m.Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että mistä tahansa kahdesta peräkkäisestä luvusta toinen on maksimiarvo.
Näin ollen jokainen luku ympyrän kehällä on siis maksimiarvo tai nolla.
Mahdolliset jonot ovat siis muotoa $\ldots, m, m, 0, m, m, 0, \ldots$. Jos n ei ole kolmella jaollinen, välttämättä $m = 0$, ja siis tehtävänannossa kysytty summa on 0.
Jos taas n on kolmella jaollinen, tehtävänannossa kysytty maksimisumma $\frac{2n}{3}$ saavutetaan jonolla

$$\ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$$

14. Osoita, että on olemassa äärettömän monta luonnollista lukua n, joille n ja $n + (n + 1)$ eivät ole neliölukuja, mutta $n + (n + 1) + (n + 2)$ on neliöluku.

14. tehtävän ratkaisu: Olkoon $n = 3k^2 - 1$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Neliöluvut ovat 0 tai 1 mod 3, joten n ei voi olla neliöluku. Nyt $n + (n + 1) = 6k^2 - 1$, joka ei ole neliöluku samasta syystä.
Mutta $n + (n + 1) + (n + 2) = 9k^2$ on neliöluku.

15. Tutkitaan murtolukua

$$\frac{\square + \square + \cdots + \square}{\square + \square + \cdots + \square + \square},$$

missä yläkerrassa on 1010 tyhjää paikkaa ja alakerrassa 1011. Kaksi pelaajaa, A ja B pelaavat peliä, jossa kumpikin vuorollaan sijoittaa jonkun luvuista $1, 2, \ldots, 2021$ johonkin tyhjään paikkaan. Kunkin luvun ja paikan saa käyttää vain kerran.

A aloittaa. A voittaa pelin, jos lopussa saatu murtoluku eroaa ykkösestä korkeintaan 10^{-6} verran. B voittaa muutoin.

Kummalla pelaajalla on voittostrategia?

15. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Voittostrategia on A:lla.

A pelaa seuraavasti: Ensin hän asettaa ykkösen alakertaan. Jos B myöhemmin pelaa luvun n, A pelaa luvun $2023 - n$ samaan kerrokseen kuin B pelasi n:n.

Nyt lopussa saatu luku on $\frac{505 \cdot 2023}{1+505 \cdot 2023} = 1 - \frac{1}{1021616}$, joka eroaa ykkösestä vähemmän kuin vaaditun verran. Siis A:lla on voittostrategia.

16. Aatu ja Bertta pelaavat seuraavaa peliä: Taululla on 17 luonnollista lukua, joista yksikään ei ole jaollinen luvulla 17. Aatu aloittaa.

Vuorollaan

- Aatu valitsee taululta jonkun luvun a ja korvaa sen luvulla a^2.
- Bertta valitsee taululta jonkun luvun b ja korvaa sen luvulla b^3.

Aatu voittaa, jos äärellisen askelmäärän jälkeen lukujen summa on jaollinen luvulla 17. Bertta voittaa, jos peli jatkuu äärettömiin.

Osoita, että Aatulla on voittostrategia.

16. tehtävän ratkaisu: Oletetaan, että alussa taululla on luku k. Oletetaan, että Aatu neliöi sen neljä kertaa ja Bertta kuutioi sen jonkun määrän kertoja. Tämän jälkeen talulla on luku $(k^{16})^\ell$ jollain ℓ. Fermat'n pienen lauseen nojalla $k^{16} \equiv 1 \mod 17$, joten taululla oleva luku on lopussa $1 \mod 17$.

Aatun voittostrategia on siis neliöidä jokainen luku neljä kertaa, minkä jälkeen jokainen luku taululla on $1 \mod 17$. Koska lukuja on 17, niiden summa on jaollinen luvulla 17.

17. Sanomme, että kolmikko a, b, c positiivisia kokonaislukuja on n-kelvollinen, jos $a + b + c | a^n + b^n + c^n$.

Onko olemassa kolmikkoa a, b, c, joka on 2020-kelvollinen ja 2021-kelvollinen, muttei 2023-kelvollinen?

17. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ei ole olemassa. Koska

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3} = (a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})+abc(a^n+b^n+c^n)-(ab+bc+ca)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}),$$

jokainen n- ja $n+1$-kelvollinen kolmikko on myös $n+3$-kelvollinen. Siis vastaus tehtävänannon kysymykseen on 'ei'.

18. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $a + b + c = 1$. Osoita, että

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{6c+1} \leq \frac{1}{2}.$$

18. tehtävän ratkaisu: Huomataan, että $\frac{a}{2a+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2a+1)}$, $\frac{b}{3b+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3b+1)}$ ja $\frac{c}{6c+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6(6c+1)}$.

Siis riittää osoittaa

$$\frac{1}{2(2a+1)} + \frac{1}{3(3b+1)} + \frac{1}{6(6c+1)} \geq \frac{1}{2}.$$

Kirjoitetaan $\frac{1}{2(2a+1)} = \frac{1}{12a+6} + \frac{1}{12a+6} + \frac{1}{12a+6}$ ja $\frac{1}{3(3b+1)} = \frac{1}{18b+6} + \frac{1}{18b+6}$.

Aritmeettis-harmonisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leq \frac{\sum x_i}{n}$$

, mikä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum x_i}.$$

Siis

$$\frac{1}{2(2a+1)} + \frac{1}{3(3b+1)} + \frac{1}{6(6c+1)} \geq \frac{6^2}{3(12a+6)+2(18b+6)+36c+6} = \frac{1}{2}.$$

19. Etsi kaikki luvut $k, \ell \in \mathbb{R}$, joille

$$ka^2 + \ell b^2 > c^2$$

pätee kaikkien kolmioiden sivujen pituuksilla a, b, c.

19. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** $k, \ell > 1$ ja $(k-1)(\ell-1) \geq 1.$

Kosinilauseen nojalla

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

eli haluttu yhtälö saa muodon

$$(k-1)a^2 + (\ell-1)b^2 > -2ab\cos\gamma.$$

Koska $\cos\gamma$ voi saada mielivaltaisen lähellä -1:tä olevia arvoja, haluttu yhtälö saa muodon

$$(k-1)a^2 + (\ell-1)b^2 \geq 2ab.$$

Jos $k \leq 1$, yhtälö ei voi päteä hyvin suurella a. Siis $k > 1$. Vastaavalla argumentilla $\ell > 1$.

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla
$(k-1)a^2 + (\ell-1)b^2 \geq 2ab\sqrt{(k-1)(\ell-1)}$,
eli haluttu yhtälö pätee aina,kun $(k-1)(\ell-1) \geq 1$. Osoitetaan, että tämä on myös välttämätön ehto halutun yhtälön pätemiselle.

Tarkastellaan epäyhtälöä

$$(k-1)a^2 - 2ab + (\ell-1)b^2 \geq 0$$

muuttujan a toisen asteen polynomiepäyhtälönä.

Diskriminantti on $4b^2(1-(k-1)(\ell-1))$, eli jos $(k-1)(\ell-1) < 1$, se on positiivinen, ja polynomilla on kaksi nollakohtaa. Nollakohtien keskiarvo on $\frac{2b}{k-1}$,eli positiivinen, joten epäyhtälö ei päde kaikilla a:n positiivisilla arvoilla. Ristiriita.

Siis haluttu yhtälö pätee jos ja vain jos $k, \ell > 1$ ja $(k-1)(\ell-1) \geq 1$. Viimeinen ehto voidaan kirjoittaa myös muodossa $k + \ell \leq k\ell$.