Kesän hauska valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 31.8.2023 mennessä sähköpostitse.
Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on ”liian pitkä intuitiohyppy” on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \le i < j \le 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \le i < j \le 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Pelilauta koostuu 15 peräkkäisestä ruudusta. 2 pelaajaa pelaa, ja kummallakin on oma pelinappula. Aluksi pelinappulat ovat pelilaudan ensimmäisessä ruudussa, ja voittaja on se, joka saa ensimmäisenä siirrettyä nappulansa laudan viimeiseen ruutuun.

Vuorollaan pelaaja siirtää nappulaansa yhden nappulan eteenpäin laudalla.

Kummallakin pelaajalla on kaksi bonusta. Bonuksella nappulaa siirretään vuorolla kaksi askelta eteenpäin yhden sijaan, mutta kunkin bonuksen saa käyttää vain kerran pelin aikana.

Kummalakin pelaajalla on vielä superbonus, jolla nappulaa saa siirtää vuorolla kolme askelta eteenpäin yhden sijaan, mutta superbonuksen saa käyttää vain kerran pelin aikana.

Osoita, että pelin aloittajalla on voittostrategia.

1. tehtävän ratkaisu: Pelaaja pääsee bonuksilla korkeintaan $3 + 2 + 2 = 7$ ruutua eteenpäin, ja joutuu tekemään vielä vähintään 7 tavallista siirtoa. Kolme bonussiirtoa ja 7 tavallista siirtoa tekee 10 siirtoa, ja jos pelaaja jättää bonuksia käyttämättä, jokainen käyttämättä jätetty bonussiirto lisää tarvittavien tavallisten siirtojen määrää. Siis yhteensä maaliin pääsemiseen menee vähintään 10 siirtoa.

Voittoruutuun pääsee 10 siirrossa käyttämällä bonukset heti alkuun, ja luonnollisesti pelin aloittaja saa 10 siirtoa tehtyä ennen toista pelaajaa.

2. Taikuri Ananaskäämi antaa Annalle seuraavat ohjeet: ”Ajattele jotain luonnollista lukua. Kerro luku kahdella ja lisää siihen kolme. Kerro luku vielä kahdella ja lisää siihen kaksi. Kerro luku vielä kahdella ja vähennä siitä viisi. Jaa luku vielä kahdeksalla ja ota jakojäänös.”

Anna noudattaa ohjeita, ja tämän jälkeen Ananaskäämi pystyy kertomaan Annalle, minkä luvun tämä sai jakojäännökseksi. Kuinka se on mahdollista?

2. tehtävän ratkaisu: Kertomisten, lisäilyjen ja vähentämisten jälkeen Annan ajattelema luku on $2(2(2n+3)+2)-5 = 2(4n+8)-5 = 8n+11$, josta tulee kahdeksalla jaettaessa jakojäännökseksi 3.

3. 3×3 -taulukon jokainen solu sisältää aluksi luvun 0. Taulukolle voidaan tehdä seuraavia operaatioita:

- Jokaiseen jonkun rivin soluun lisätään luku 1.
- Jokaisesta jonkun sarakkeen solusta vähennetään luku 1.
- Jokaista jonkun rivin lukua siirretään yksi ruutu oikealle (ja oikeanpuolimmaisin rivin luku siirretään rivin vasemmanpuolimmaiseen soluun.)
- Jokaista jonkun sarakkeen lukua siiretään yksi ruutu alaspäin (ja alin sarakkeen luku siirretään sarakkeen ylimpään soluun.)

Onko sarjalla tällaisia operaatioita mahdollista päästä taulukkoon, jonka vasemmassa yläkulmassa ja oikeassa alakulmassa ovat ykköset, ja muut solut ovat nollia?

3. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Ei ole.

Jokaisessa operaatiossa kaikkien solujen lukujen summa säilyy vakiona $\mod 3$. Koska alkutilassa summa on $0 \mod 3$ ja halutussa lopputilassa $2 \mod 3$, haluttuun lopputilaan ei päästä.

4. Alla rivit tarkoittavat vaakarivejä, sarakkeet pystyrivejä.

Taikuri Ananaskäämi jakaa 27 pelikorttia kuvapuoli ylöspäin yhdeksäksi kolmen kortin riviksi, rivit ovat allekkain muodostaen yhdeksän saraketta. Sitten hän pyytää Annaa ajattelemaan jotain korttia ja kertomaan, missä sarakkeessa se on.

Ananaskäämi kerää kortit pakaksi sarake kerrallaan ylhäältä alas, Annan osoittama sarake keskimmäiseksi.

Ananaskäämi jakaa kortit rivi kerrallaan vasemmalta oikealle yhdeksäksi kolmen kortin riviksi.

Ananaskäämi pyytää taas Annaa osoittamaan, missä sarakkeessa hänen alussa valitsemansa kortti on, ja hän toistaa korttien keräämisen ja uudelleenjaon kuten äsken.

Sitten Ananaskäämi pyytää taas Annaa osoittamaan, missä sarakkeessa hänen alussa valitsemansa kortti on.

Nyt Ananaskäämi pystyy osoittamaan, mikä Annan alussa valitsema kortti on. Kuinka se on mahdollista? (Toisin sanoen miksi temppu väistämättä onnistuu ylläkuvatulla tavalla.)

4. tehtävän ratkaisu: Ensimmäisen uudelleenjaon jälkeen Annan ajattelema kortti on jokin jonkun sarakkeen kolmesta keskimmäisestä kortista, ja toisen uudelleenjaon jälkeen se on jonkin sarakkeen keskimmäinen kortti.

Kun Anna tämän jälkeen osoittaa saraketta, Ananaskäämi tietää, että Annan valitsema kortti on tuon sarakkeen keskimmäinen kortti.

5. Teen sinulle taikatempun. Ajattele itseäsi allaolevan ruudukon ruutuun A ja siirrä itseäsi 5 askelta. Askel tarkoittaa siirtymistä ruutuun, jolla on yhteinen sivu edellisen ruudun kanssa. Voit vaihtaa vapaasti suuntaa, myös astua taaksepäin.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Tiedän, ettet ole ruuduissa C, G tai I, joten ne voidaan poistaa. Järjestellään ruudut uudelleen

D	A	B	X
X	F	E	H

Jatka nyt samasta kirjaimesta, jossa olit ensimmäisessä ruudukossa, ja siirry ylläolevassa ruudukossa 7 askelta. Älä siirry X:llä merkittyihin ruutuihin, koska niissä on pommi.

Tiedän, että et ole ruuduissa tai D, H, joten ne voidaan poistaa. Nyt ruudukko on

A	B
F	E

Jatka nyt samasta kirjaimrsta jossa olit ja siirry 3 askelta ylläolevassa ruudukossa.

Tiedän, ettet ole ruudussa A, joten se voidaan poistaa. Järjestellään ruudut uudelleen

B	E	F

Jatka nyt samasta kirjaimesta jossa olit ja siirry 1 askel ylläolevassa ruudukossa.

Simsalabim, tiedän, että olet ruudussa E.

Tehtävä: Selitä, miksi edellinen temppu väistämättä onnistuu.

5. tehtävän ratkaisu: Ajatellaan ensimmäinen ruudukko jaetuiksi mustiin ja valkoisiin ruutuihin kuten shakkilauta, A on valkoinen. Kun siirrytään pariton määrä askelia, siirrytään eriväriseen ruutuun, eli tässä tapauksessa mustaan. Tämän jälkeen voi poistaa valkoisia ruutuja, ja uudelleenjärjestelyssä säilytetään aina ruutujen väri sekä mustien ja valkoisten ruutujen vuorottelu.

Jatkossakin aina tiedetään, minkä värisessä ruudussa lukija on, joten toisen värisiä ruutuja voidaan poistella surutta.

6. Anne ja Bertta pelaavat peliä joukkueena Carlia vastaan. Bertta poistuu huoneesta, ja Carl jakaa 100 esinettä kahteen kasaan, punaiseen ja siniseen kasaan (jompi kumpi kasaa saa myös jäädä tyhjäksi). Punainen kasa on punaisen huovan päällä ja sininen kasa sinisen huovan päällä; kaikki esineet ovat keskenään samanlaisia.

Sen jälkeen Anne poistaa yhden esineen jommasta kummasta kasasta. Tämän jälkeen Carl saa vielä järjestellä kasoja uudelleen, mutta tässä vaiheessa hän ei saa siirtää esinettä kasasta toiseen.

Bertta tulee huoneeseen ja yrittää arvata, kummasta kasasta Anne poisti esineen. Anne ja Bertta voittavat, jos Bertta arvasi oikein. Muutoin Carl voittaa.

Osoita, että Anne ja Bertta eivät pysty sopimaan systeemiä, jolla he voittavat varmasti.

6. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että Annella ja Bertalla on tällainen systeemi.

Olkoon k pienin luku siten, että jos punaisessa kasassa on k esinettä, Anne poistaa esineen punaisesta kasasta. Selvästikään k ei voi olla nolla, koska tyhjästä kasasta ei voi poistaa esinettä.

Mutta nyt Anne poistaa esineen sinisestä kasasta, jos punaisessa kasassa on $k-1$ esinettä, ja lopputulos tässä tapauksessa on sama kuin Annen poistaessa esineen punaisesta kasasta kun siinä oli alun perin k esinettä. Bertta ei pysty erottamaan näitä kahta tapausta.

7. Anne ja Bertta pelaavat peliä joukkeena Carlia vastaan. Bertta poistuu huoneesta.

Huoneen seinällä on kiekko, jota voi pyörittää. Carl merkitsee kiekon kehältä 20 pistettä. Tämän jälkeen Anne poistaa merkin yhdestä Carlin merkitsemistä pisteistä. Tämän jälkeen Carl saa vielä pyörittää kiekkoa.

Bertta tulee huoneeseen ja yrittää arvata, minkä kahden merkityn pisteen välistä Anne poisti merkin. Anne ja Bertta voittavat, jos Bertta arvasi oikein. Muutoin Carl voittaa.

Osoita, että Anne ja Bertta voivat sopia systeemin, jolla he voittavat varmasti.

7. tehtävän ratkaisu: Kun Carl on merkinnyt pisteet, joidenkin kahden peräkkäisen merkityn pisteen väli on pisin. Pisin väli ei ole välttämättä yksikäsitteinen, mutta se ei haittaa; Anne valitsee vain jonkun pisimmistä väleistä. Anne poistaa jomman kumman kyseisen välin päätepisteistä. Nyt se väli, jolta Anne on poistanut pisteen on yksikäsitteinen pisin väli.

Tullessaan huoneeseen Bertta voi veikata pisintä merkittyjen pisteiden väliä, ja tämä arvaus osuu väistämättä oikeaan.

8. 20×20 -ruudukon sarakkeet on numeroitu vasemmalta oikealle ja rivit ylhäältä alas. Ruudukosta on valittu ruutuja. Jos r on valittu ruutu, ei ole toista valittua ruutua, jonka sekä rivinumero olisi sama tai suurempi että sarakenumero olisi sama tai suurempi.

Mikä on suurin mahdollinen määrä valittuja ruutuja?

8. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Suurin määrä on 20.

20 valittua ruutua saadaan, kun valitaan diagonaali oikeasta yläkulmasta vasempaan alakulmaan.

Todistetaan, ettei voida valita enempää kuin 20 ruutua. Oletetaan, että samalla rivillä on kaksi valittua ruutua r ja r'. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että r:n rivinumero on pienempi. Mutta nyt r' rikkoo tehtävänannon ehtoa r:lle. Siis yhdellä rivillä voi olla vain yksi valittu ruutu, joten suurin määrä valittuja ruutuja on 20.

9. Oletetaan, että meillä on n kuulaa, $n \geq 4$. Millään kahdella kuulalla ei ole samaa painoa, eikä millään kahdella kuulaparilla ole samaa yhteispainoa.

Meillä on käytössä tasapainovaaka, jossa on kaksi vaakakuppia, ja se kuppi painuu alas, jossa on suurempi paino. Punnituksella tarkoitamme operaatiota, jossa kumpaankin kuppiin laitetaan täsmälleen kaksi kuulaa, ja vaaka kertoo, kummassa kupissa on painavampi lasti.

Osoita, että riittävän pitkällä, sopivasti valitulla sarjalla punnituksia pystytään löytämään joko kevein tai raskain kuula.

9. tehtävän ratkaisu: Sanomme, että punnituksessa raskaamman kupin kuulat voittavat punnituksen.

Oletetaan ensin, että $n = 4$. Erilaisia punnituksia on yhteensä kuusi, ja tehdään ne. Jos yksi kuula oli mukana voittamassa kaikki punnitukset, se on raskain, ja tehtävä ratkaistu. Muussa tapauksessa raskain kuula hävisi punnituksen, jossa sen parina oli kevein kuula. Mutta tällöin kevein kuula hävisi kaikki punnitukset, ja se voidaan tunnistaa tästä.

Oletetaan sitten, että $n > 4$. Tehdään kaikki mahdolliset punnitukset. Koska pari, joka koostuu raskaimmasta ja toiseksi raskaimmasta kuulasta voittaa kaikki punnitukset joihin se osallistuu, on vähintään yksi pari, joka voittaa kaikki punnitukset, joihin se osallistuu.

Jos tällaisia pareja on useampi kuin yksi, niissä on välttämättä yksi yhteinen kuula. Jos nimittäin parit (a, b) ja (c, d) voittaisivat kaikki punnitukset joihin ne osallistuvat, a, b, c, d erillisiä, punnittaessa nämä kaksi paria keskenään jompi kumpi pari häviäisi. Tämä yhteinen kuula on väistämättä raskain, ja olemme löytäneet raskaimman kuulan.

Jos pareja, jotka voittavat kaikki punnitukset on vain yksi, se koostuu raskaimmasta ja toiseksi raskaimmasta kuulasta, ja otamme tämän parin jatkoon.

Symmetrisellä argumentilla löydetään joko kevein kuula tai pari, joka koostuu keveimmästä ja toiseksi keveimmästä kuulasta.

Jäljellä on siis tapaus, jossa tiedämme parin, joka koostuu raskaimmasta ja toiseksi raskaimmasta kuulasta sekä parin, joka koostuu keveimmästä ja toiseksi keveimmästä kuulasta. Nyt näille neljälle kuulalle voidaan toistaa alun $n = 4$-päättely ja löytää joko kevein tai raskain.

Vaikeampia tehtäviä

10. Postimiehellä on 101 pakettia, joiden painot ovat $1, 2, \ldots, 101$. Voiko postimies jakaa ne kolmeen kasaan, joiden yhteispainot ovat samat?

10. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kyllä voi.

Painot $k, k{+}1, \ldots, k{+}5$ voidaan jakaa kolmeen kasaan vaaditulla tavalla $(k, k{+}5), (k{+}1, k{+}4), (k{+}2, k{+}3)$. Näin ollen mikä tahansa kuudella jaollinen pakettimäärä, joiden painot ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, voidaan jakaa kolmeen kasaan vaaditulla tavalla.

Tehtävänannon pakettijoukosta saadaan edellisen ehdon toteuttava pakettijoukko lisäämällä siihen virtuaalipaketti, jonka paino on 0.

11. $n \times n$-ruudukko pitää peittää T-tetrominoilla eli muodoilla, jonka allaolevat X:t muodostavat

X	X	X
	X	

Paloja saa pyöritellä. Millä n:n arvoilla koko laudan saa peitettyä?

11. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Onnistuu jos ja vain jos $4|n$.

Koska jokanen tetromino peittää neljä ruutua, n:n pitää olla parillinen. Jos n on parillineen, mutta $4 \not| n$, tetrominoja menisi pariton määrä. Jos ruudukko on väritetty kuten shakkilauta, jokainen tetromino peittää kolme yhdenväristä ja yhden erivärisen ruudun. Näin ollen pariton määrä tetrominoja ei peitä yhtä montaa mustaa ja valkoista ruutua, vaikka ruudukolla on yhtä monta mustaa ja valkoista ruutua.

4×4 -ruudukko voidaan peittää seuraavasti (tetrominot A,B,C ja D),

A	B	B	B
A	A	B	C
A	D	C	C
D	D	D	C

Kun $4|n$, ruudukko voidaan peittää toistamalla ylläolevaa kuviota.

12. Martta haluaa valmistaa korttipakan, joka täyttää seuraavat ehdot:

1. Jokaisessa kortissa on yksi luku viidestä mahdollisesta luvusta.
2. Jokainen viidestä mahdollisesta luvusta on vähintään yhdessä kortissa
3. Kun Martta ottaa korteista mitkä tahansa kaksi ja laskee niiden luvut yhteen, pakasta löytyy toiset kaksi korttia, joiden lukujen summa on sama.

Mikä on pienin määrä kortteja, jolla Martan on mahdollista tehdä tällainen pakka?

12. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Pienin määrä on 13 korttia.

Olkoon luvut $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Koska Martan on ehdossa (3) mahdollista ottaa kortit a_4 ja a_5, toisen matchaavan summan aikaansaamiseksi a_4:ää ja a_5:ttä on oltava kumpiakin vähintään 2 kappaletta. Siis Martan on mahdollista ottaa kaksi a_5:ttä, ja matchaavan summan aikaansaamiseksi a_5:ttä on oltava toiset kaksi, siis yhteensä vähintään 4.

Symmetrisellä argumentilla a_1:tä on oltava vähintään 4 ja a_2:ta vähintään 2.

Mutta enempää kortteja ei tarvita, koska pakka

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5$$

täyttää tehtävänannon ehdot.

13. n pelaajaa, $n \geq 2$ osallistuu lautapeliin. Pelin jälkeen voittajalle annetaan pääkirjaan n pistettä, toiseksi tulleelle $n-1$ pistettä jne.

Sama porukka toistaa samaa niin, että pelataan yhteensä k peliä. Kun kunkin pelaajan pääkirjan pisteet lasketaan yhteen, havaitaan, että jokaisella on yhteensä 26 pistettä.

Millä (n, k)-pareilla tämä on mahdollista?

13. tehtävän ratkaisu: Yhdessä pelissä annetaan $\frac{n(n+1)}{2}$ pistettä, joten yhteensä annetaan $k\frac{n(n+1)}{2}$ pistettä. Toisaalta pisteiden yhteismäärä on $26n$, joten

$$k\frac{n(n+1)}{2} = 26n,$$

mikä saadaan muotoon

$$k(n+1) = 52.$$

Kandidaatit ovat siis $k = 1, k = 2, k = 4, k = 13, k = 26, k = 52$. Kandidaatit $k = 52, k = 26$ tuottavat alle kaksi pelaajaa, joten ne voidaan sulkea pois.

$k = 1$ on mahdotonta, koska yhdessä pelissä kaikille pelaajille ei anneta samaa määrää pisteitä.

$k = 2$ on mahdollinen. Jos pelaaja sai ensimmäisessä pelissä h pistettä, hän saa toisessa $n - h$ pistettä.

$k = 4$ on mahdollinen samalla tavalla kuin $k = 2$. Nyt vain pelataan kaksi kahden pelin kokonaisuutta, kumpikin kokonaisuus pisteytetään kuten $k = 2$-kohdassa.

$k = 13, n = 3$ on mahdollinen, mutta pistetaulukko pitää tehdä käsityönä. Olkoon pelaajat A, B, C.

- 4 ensimmäisessä pelissä A saa 2 pistettä, B 1 piste, ja C 3 pistettä.
- 3 seuraavassa pelissä A saa 2 pistettä, B 3 pistettä ja C 1 piste.
- Seuraavassa pelissä A saa 1 pisteen, B 3 pistettä ja C 2 pistettä.
- 2 seuraavassa pelissä A 1 piste, B 2 pistettä, C 3 pistettä.
- 3 viimeisessä pelissä A 3 pistettä, B 2 pistettä, C 1 piste.

Mahdolliset parit ovat siis $(k = 2, n = 25), (k = 4, n = 12), (k = 13, n = 3)$.

14. Äärettömällä ruutupaperilla on pelinappuloita 10×10-neliön jokaisessa ruudussa, yksi nappula jokaisessa ruudussa. Kutsumme nappuloita vierekkäisiksi, jos niiden ruuduilla on yhteinen sivu.

Nappulat järjestellään uudelleen niin, että yhteen ruutuun ei tule enempää kuin yksi nappula, ja lisäksi nappulat ovat vierekkäisiä siirron jälkeen jos ne olivat vierekkäisiä ennen siirtoa. Lisäksi siirron jälkeen saatu muoto on täytetty muoto, jossa ei ole reikiä sisällä.

Osoita, että nappulat täyttävät myös siirron jälkeen 10×10 -neliön.

14. tehtävän ratkaisu: Nappuloiden naapurien määrä ei pienene siirrossa. Kulmanappuloilla on kaksi naapuria, reunanappuloilla kolme ja sisänappuloilla 4. Näin ollen kulmanappuloiden määrä ei kasva siirrossa.

Ainoa muoto, jossa on neljä kulmanappulaa on suorakaide, eikä alle neljän kulmanappulan muotoja ole. Näin ollen kulmanappuloita on neljä myös siirron jälkeen eikä reunanappuloiden määrä kasva siirrossa.

Olkoon a ja b siirron jälkeisen suorakaiteen sivujen pituudet. Koska nappuloita on yhteensä yhtä paljon kuin ennen siirtoa sekä reunanappuloita on korkeintaan yhtä paljon kuin ennen siirtoa, pätee

$$ab = 100.$$
$$2(a + b) \leq 40.$$

Yhtälöryhmästä

$$ab = 100.$$
$$2(a + b) = 40$$

saadaan yhtälö

$$a^2 - 20a + 100 = 0$$

Jonka ainoa ratkaisu on $a = 10$, mistä saadaan yhtälöryhmän ratkaisu $a = b = 10$.
Yhtälöryhmästä

$$ab = 100.$$
$$2(a + b) = c$$

saadaan yhtälö

$$a^2 - (c/2)a + 100 = 0,$$

jolla ei ole reaalista ratkaisua a:n suhteen, kun $c < 40$.

15. Aatu ja Beetu pelaavat seuraavaa peliä: Ensin Aatu asettaa 46 pelinappulaa 9×9-ruudukon joihinkin ruutuihin, korkeintaan yksi nappula ruutuunsa.

Sitten Beetu yrittää etsiä ruudukolta 2×2 -blokin, jossa on vähintään kolme pelinappulaa. Beetu voittaa, jos hän onnistuu. Aatu voittaa muutoin.

Osoita, että voittostrategia on Beetulla.

15. tehtävän ratkaisu:

Lemma Jos 3×3 -ruudukko täytetään niin, että Aatulla on voittostrategia, nappuloita voi olla korkeintaan 6, ja jos niitä on tasan 6, kaikki kulmat on täytetty.

Todistus: Numeroidaan ruudut kuten alla

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{matrix}$$

Merkitään $a_i = 1$, jos a_i:ssä on nappula, muutoin $a_i = 0$.

Oletetaan, että $\sum a_i \geq 6$. Siitä, että Aatulla on voittostrategia tiedetään, että

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \leq 2$$

$$a_4 + a_5 + a_7 + a_8 \leq 2$$

$$a_2 + a_3 + a_5 + a_6 \leq 2$$

$$a_5 + a_6 + a_8 + a_9 \leq 2$$

Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan

$$3a_5 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \sum a_i \leq 8.$$

Ehdosta $\sum a_i \geq 6$ saadaan

$$3a_5 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 \leq 2.$$

Eli $a_5 = 0$, ja ykkösiä on korkeintaan kaksi ruuduista a_2, a_4, a_6, a_8. Siis ehdosta $\sum a_i \geq 6$ seuraa, että kulmaruuduissa on nappula ja laudalla on korkeintaan kaksi muuta nappulaa. Lemman todistus valmis.

Lemma Jos $(2n+1) \times (2n+1)$-laudalle laitetaan nappuloita niin, että Aatulla on voittostrategia, niitä voidaan laittaa korkeintaan $(2n+1)(n+1)$.

Todistus: Todistetaan väite induktiolla. Jos $n = 0$, väite ilmeisesti pätee. Oletetaan, että väite pätee $(2n-1)$:lle.

Jaetaan $(2n+1) \times (2n+1)$ -lauta seuraavasti:

1. $(2n-1) \times (2n-1)$-lautaan.
2. Kahteen $(2n-2) \times 2$-lautaan.
3. 3×3-lautaan, josta puuttuu yksi kulma.

Laudalle (1) voidaan laittaa induktio-oletuksen nojalla $(2n-1)(n)$ nappulaa, ja laudoille (2) yhteensä $(4n-4)$ nappulaa ilman, että Beetulla on voittostrategia.

Jos siinä (3):n puuttuvassa kulmassa on nappula, (3)-laudalle voidaan laittaa edellisen lemman nojalla korkeintaan viisi nappulaa, samoin jos puuttuvassa ruudussa ei ole nappulaa.

Yhteensä siis voidaan laittaa nappuloita $n(2n-1) + 2(2n-2) + 5 = 2n^2 + 3n + 1 = (2n+1)(n+1)$. Lemman todistus valmis.

Nyt lemman nojalla 46 nappulalla ja 9×9-ruudukolla voittostrategia on Beetulla.

16. 2000 ihmistä seisoo rivissä. Kukin ihminen on joko valepukki, joka valehtelee aina tai totuuden torvi, joka kertoo aina totuuden.

Kaikki ihmiset sanovat yhteen ääneen: ”Vasemmalla puolellani on enemmän valepukkeja kuin oikealla puolellani totuuden torvia.”

Onko ylläolevien tietojen valossa mahdollista määrittää, kuinka monta valepukkia ja kuinka monta totuuden torvea jonossa on?

16. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kyllä on: Kumpiakin on 1000.

Olkoot ihmiset vasemmalta oikealle $P_1, P_2, \ldots, P_{2000}$

Lemma Ensimmäiset 1000 ihmistä ovat valepukkeja.

Todistetaan lemma induktiolla. P_1 on ilmeisesti valepukki, koska hänen vasemmalla puolellaan ei ole yhtään ihmistä.

Oletetaan sitten että $P_1, \ldots, P_k$ ovat valepukkeja. Tutkitaan henkilöä P_{k+1}, $k+1 \leq 1000$. Tehdään vastaoletus, että hän on totuuden torvi. Hänen vasemmalla puolellaan on k valepukkia, joten hänen oikealla puolellaan on korkeintaan $k-1$ totuuden torvea. Koska hänen oikealla puolellaan on $2000-(k+1)$ ihmistä, hänen oikealla puolellaan on vähintään $2000-2k$ valepukkia. Olkoon $P_{k'}$ näistä oikeanpuolimmaisin. Hänen vasemmalla puolellaan on vähintään $1999-k$ valepukkia ja oikealla puolellaan korkeintaan $k-1$ totuuden torvea. Mutta nyt $k-1 \geq 1999-k$, mistä seuraa $k \geq 1000$, ristiriita induktio-oletuksen kanssa, lemman todistus valmis.

Nyt siis tiedetään, että 1000 ensimmäistä ihmistä ovat valepukkeja, joten loppujen 1000 ihmisen ilmoitukset ovat totuudenmukaisia, eli he ovat totuuden torvia.

17. Emilia on Touko Jurkan kuvataidekoulun pääsykokeessa. Jurkka antaa Emilialle luonnollisen luvun n ja seuraavan tehtävän:

Emilian on piirrettävä jana, jonka pituus on 1, sitten jana jonka pituus on 2, sitten jana, jonka pituus on 3 jne. aina haluamaansa pituuteen saakka. Emilia ei saa nostaa kynää, eli $k+1$:nnen janan on alettava siitä, mihin k:s jana loppui. Janat saavat ristetä, jopa kulkea päällekkäin.

Emilia hyväksytään kouluun, jos hänen piirtämänsä janat muodostavat täsmälleen, ilman mitään ylimääräistä, sellaisen neliön reunat, jonka sivun pituus on vähintään n.

Onko Emilian mahdollista päästä kouluun kaikilla n:n arvoilla?

17. tehtävän ratkaisu: **Vastaus:** Kyllä on.

Emilia käyttää seuraavaa strategiaa: Ensin hän piirtää k janaa ylöspäin, jonka jälkeen hän on piirtänyt yhden neliön sivun pituudeltaan $\ell = \frac{k(k+1)}{2}$. Sitten hän piirtää oikealle niin monta janaa kuin mahtuu ylittämättä pituutta ℓ. Sitten hän piirtää janan vasemmalle, sitten taas oikealle, jne. sahaten edestakaisin kunnes pituus ℓ tulee täyteen. Kolmas ja neljäs sivu piiretään samalla taktiikalla kuin toinen.

Seuraavaksi todistamme, että kun k on riittävän iso, piirretyksi ei tule mitään ylimääräistä neliön sivujen lisäksi.

Lemma Olkoon h luonnollinen luku ja J jana, jonka pituus on j, $h \leq j \leq h^2$. Kun J:n sisään piirretään vasemmalta oikealle janat pituudeltaan $h, h+1, h+2, \ldots$, niin monta kuin sisään mahtuu, J:stä jää peittämättä korkeintaan $2h$ yksikköä.

Todistus: J:n saa peitettyä h kpl h:n pituisella janalla, joten viimeinen lemmassa piirrettävä jana on korkeintaan $2h-1$ pituinen (korkeintaan $2h$ pituinen, jos J peittyy kokonaan). Seuraava, joka peittäisi J:n olisi korkeintaan $2h$ pituinen, joten peittämättä jää korkeintaan $2h$ yksikköä. Lemma valmis.

Lemma Olkoon h luonnollinen luku ja J jana, jonka pituus on j, $h \leq j \leq h^2$. Kun J peitetään samalla tekniikalla kuin neliön toinen, kolmas ja neljäs sivu aloittaen pituudesta h, viimeisen janan pituus on korkeintaan $6h$.

Todistus: Edellisen lemman nojalla osassa, jossa peitetään vasemmalta oikealle käytetään korkeintaan h janaa, ja peittämättä jää korkeintaan $2h$ yksikköä. Sahaustekniikalla näiden peittämiseen menee $4h$ janaa, joten käytetään korkeintaan $5h$ janaa. Lemma valmis.

$\frac{k(k+1)}{2} \leq k^2$, ja ensimmäisen sivun peittämiseen menee k janaa, joten lemmojen nojalla ensimmäisen ja toisen sivun peittämiseen menee yhteensä korkeintaan $6k$ janaa.

Riittävän suurella k:n arvolla $6k+1 \leq \frac{k(k+1)}{2}$, joten lemmoja voi käyttää kolmannen sivun peittämiseen, minkä jälkeen on käytetty $6(6k+1) \leq 50k$ janaa.

Neliön piirrossa ei piirettä mitään ylimääräistä, jos neljättä sivua piirrettäessä kaksi ensimmäistä janaa piirretään vasemmalle, eli jos $51k + 52k \leq \frac{k(k+1)}{2}$. Mutta tämä toteutuu riittävän suurella k.

18. Pöydällä on alassuin 405 korttia, joissa on luvut $1, 2, \ldots, 405$.

Oraakkeli ja järjestäjä pelaavat peliä. Oraakkeli tuntee korttien luvut, järjestäjä ei.

Järjestäjä esittää kysymyksen seuraavasti: Järjestäjä valitsee kolme korttia, ja oraakkeli kertoo, mikä noista korteista on suurin ja mikä pienin.

Onko järjestäjän mahdollista päätellä kaikkien korttien luvut 2000 kysymyksellä?

18. tehtävän ratkaisu: Vastaus: Kyllä on.

Määrätään ensin rekursiokaava riittävälle kysymysten määrälle. Meillä on siis $3n$ korttia, ja induktio-oletuksena n kortin järjestys voidaan päätellä k kysymyksellä.

Järjestetään ensin kortit kolmeen yhtäsuureen pinkkaan, ja järjestetään kukin pinkka. Tähän menee $3k$ kysymystä.

Olkoon kortit pinkoittain suuruusjärjestyksessä $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ ja $c_1, \ldots, c_n$.

Seuraavaksi käydään pinkat läpi. Ensin vertaillaan a_1, b_1, c_1. Valitaan näistä pienin ja nostetaan indeksiä pienimmän pinkasta yhdellä pykälällä. Jos esim. a_1 oli pienin, seuraavaksi vertaillaan a_2, b_1, c_1. Valitaan taas näistä pienin ja nostetaan sen pinkan indeksiä yhdellä pykälällä. Käydään näin kaikki pinkat läpi. (Jos joku pinkka loppuu ennen muita, käytetään sen suurinta korttia ja nostetaan vertailussa toiseksi suurinta). Tähän menee $3n$ kysymystä.

Osoitetaan, että nyt tiedetään kaikkien korttien järjestys. WLOG osoitetaan, että tiedetään, kumpi on suurempi, a_i vai b_j. Olkoon v viimeinen vertailu ylläolevassa prosessissa, jossa b_j oli mukana. Jos mukana oli $a_{i'}$, $i' > i$, tiedetään, että jossain aiemmassa vertailussa a_i oltiin todettu pienemmäksi kuin $b_{j'}$, $j' \leq j$. Mutta nyt $a_i < b_{j'} < b_j$, ja siis järjestys tunnetaan.

Jos taas v:ssä oli mukana a_i, tiedetään, että $a_i > b_j$.

Jäljellä on tapaus, jossa v:ssä oli mukana $a_{i'}$, jolle $i' < i$. Nyt $b_j < a_{i'} < a_i$, ja siis järjestys tunnetaan. ’ Siis prosessissa kaikkien korttien keskinäinen järjestys selviää.

Saamme siis rekursiokaavan riittävälle kysymysten määrälle f seuraavasti $f(3n) = 3f(n) + 3n$.

5 korttia voidaan järjestää neljällä kysymyksellä. (Järjestä ensin $a_1 < a_2 < a_3$, oletetaan että järjestys tuo. Kysy sitten a_3, a_4, a_5. Jos jompi kumpi suurempi kuin a_3, kortti on järjestetty. Jos jompi kumpi (a_i) pienempi kuin a_3, se voidaan järjestää kysymällä a_1, a_2, a_i)

Nyt voidaan alkaa laskemaan

$$f(5) = 4$$
$$f(15) = 12 + 15 = 17$$
$$f(45) = 51 + 45 = 96$$
$$f(135) = 288 + 135 = 423$$
$$f(405) = 1269 + 405 = 1674$$