Syyskuun valmennustehtäväsarja

Helpommatkin tehtävät ovat vaikeampia kuin koulutehtävät, eikä ole oletettavaa että niitä pystyisi ratkomaan ilman vaivannäköä. *Sinnikäs yrittäminen kannattaa.* Vaikka tehtävää ei saisi valmiiksi asti tehtyä, sitä pitkään miettinyt oppii malliratkaisuista enemmän. Helpommissakin tehtävissä olennaista on kirjoittaa perustelut eikä vain laskea lopputulosta esim. laskimella. Tehtävät eivät ole välttämättä vaikeusjärjestyksessä.

Olemme hyvin tietoisia siitä, että netissä on monenlaisia lähteitä, joista ratkaisuja voi löytää; `https://aops.com` ja `https://math.stackexchange.com` lienevät tunnetuimpia. Näiden käyttäminen ei ole haitaksi ja niistä voi oppia paljonkin, mutta suosittelemme yrittämään ensin itse. Myös tehtävien pohtiminen muiden valmennettavien kanssa, jos siihen tarjoutuu tilaisuus, lienee opettavaista.

Tehtäviin pujahtaa joskus virheitä. Havaituista virheistä kerrotaan valmennuksen sivulla

`https://matematiikkakilpailut.fi/valmennus/`.

Ratkaisuja toivotaan viimeistään 15.10.2023 mennessä sähköpostitse.

Tuomas Korppi, punnort@hotmail.fi

Huomioi tietosuojalauseke:

`https://matematiikkakilpailut.fi/tietosuoja/`.

Huom! Tästälähin alamme kiinnittää huomiota myös vastausten kirjoitusasuun, ja teille tulee negatiivista palautetta myös siitä, jos kirjoitatte vastaukset epäselvästi.

Kiinnitämme huomiota mm. seuraaviin asioihin:

- Päättelyaskeleet on perusteltava järkevällä tarkkudella, eikä liian pitkiä intuitiohyppyjä saa tehdä. Sitä, mikä on ”liian pitkä intuitiohyppy” on kuitenkin vaikea määritellä. Esimerkiksi seuraava hyppy on liian pitkä:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Siis on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

  Parempi olisi kirjoittaa:

  > Nyt $x_1, \dots, x_{40}$ on jono säännöllisen 20-tahokkaan P särmiä. Koska säännöllisellä 20-tahokkaalla on vain 30 särmää, on olemassa $1 \leq i < j \leq 40$, joille $x_i = x_j$.

- Oikeaoppinen matemaattinen teksti koostuu kokonaisista virkkeistä, ja myös kaavat ovat osa virkkeitä. Tällaisesta tyylistä näette esimerkin kirjevalmennuksen viimeaikaisista mallivastauksista. Tähän kannattaa pyrkiä. Koska te ette ole vielä yliopisto-opiskelijoita, hyväksyn teiltä vastaukseksi myös esim. pelkän ekvivalenssimerkeillä yhdistyn jonon yhtälöitä, jos tehtävä sellaisen ratkaisun mahdollistaa.

- Jos olet epävarma käsialasi luettavuudesta, kirjoita vastaukset koneella.

Hyvää matemaattista tekstiä oppii tuottamaan vain harjoittelemalla. Kun kilpailutilanteessa kirjoitat vastauksesi hyvin, voit olla varma, ettet ainakaan menetä pisteitä siksi, että tuomarit eivät ole ymmärtäneet hienoja ideoitasi.

Helpompia tehtäviä

1. Merkitään $x \circ y = 2x + y + 1$. Osoita, että on olemassa reaaliluku a, jolle $a \circ y = y$ kaikilla reaaliluvuilla y.

1. tehtävän ratkaisu: Valitaan $a = -\frac{1}{2}$.
Nyt $a \circ y = 2a + y + 1 = 2(-\frac{1}{2}) + y + 1 = y$.

2. Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden keskiarvo ei voi olla kokonaisluku.

2. tehtävän ratkaisu: Osoitetaan yhtäpitävä väite, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa ei ole kolmella jaollinen.

$1^2 = 1 \mod 3$. $0^2 = 0 \mod 3$ ja $2^2 = 4 \equiv 1 \mod 3$. Eli luvun neliö on $0 \mod 3$, jos luku on kolmella jaollinen ja luvun neliö on $1 \mod 3$, jos luku ei ole kolmella jaollinen.

Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta yksi on kolmella jaollinen ja kaksi kolmella jaottomia. Lukujen neliöiden summa on siis $2 \mod 3$, eikä luku ole kolmella jaollinen.

3. Olkoon $a, b > 1$ reaalilukuja.
Osoita, että $ab + 1 > a + b$.

3. tehtävän ratkaisu: Koska $a, b > 1$, pätee

$$(a-1)(b-1) > 0.$$

Purkamalla vasen puoli auki saadaan

$$ab + 1 - a - b > 0.$$

Heittämällä miinusmerkkiset termit oikealle saadaan

$$ab + 1 > a + b.$$

4. Etsi äärettömän monta funktiota $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ on positiiviset kokonaisluvut), jotka toteuttavat ehdon $f(n+1) = f(n) + 2^{n-1}$ kaikilla $n \geq 1$.

4. tehtävän ratkaisu: Funktiot muotoa $f(n) = 2^{n-1} + c$ toteuttavat ehdon kaikilla $c \in \mathbb{N}$.

5. Olkoon $n_1, \ldots, n_5$ viisi peräkkäistä paritonta lukua niin, että n_3 on jaollinen luvulla 3. Osoita, ettei luvuilla n_i, n_j, $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 5$, ole yhteisiä tekijöitä.

5. tehtävän ratkaisu: n_i:n ja n_j:n yhteiset tekijät ovat myös $n_i - n_j$:n tekijöitä. Mutta $n_i - n_j$ on luku joukossa $\{2, 4, 6, 8\}$, ja näillä on alkutekijänä pelkästään kakkosta ja kolmosta. Kakkonen ei voi olla n_i:n tai n_j:n tekijä, koska ko. luvut ovat parittomia.

Kolmonen on n_3:n tekijä. Siis n_4 on $2 \mod 3$ ja n_5 on $1 \mod 3$. Vastaavasti n_2 on $1 \mod 3$ ja n_1 on $2 \mod 3$. Siis millään kahdella n_i:llä ei myöskään ole kolmosta yhteisenä tekijänä.

6. Olkoon A säännöllinen n-kulmio, jonka sivun pituus on 1. Osoita, että A:n ympäri ja sisään piirrettyjen ympyrärenkaiden rajoittama ala ei riipu muuttujasta n.

6. tehtävän ratkaisu: Olkoon r pienemmän ympyrän säde. Nyt r on sama kuin etäisyys A:n keskipisteestä A:n sivun keskipisteeseen.

Olkoon R suuremman ympyrän säde. Nyt R on sama kuin etäisyys A:n keskipisteestä A:n kärkeen. Siis $R = \sqrt{r^2 + (\frac{1}{2})^2}$.

Siis $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + \frac{1}{4} - r^2) = \frac{1}{4}\pi$ ei riipu muuttujasta n.

7. Olkoon N konveksi nelikulmio. Yhdistetään N:n vierekkäisten sivujen keskipisteet janoilla. Tehdään tämä kaikille vierekkäisten sivujen keskipistepareille. Osoita, että näin saatu nelikulmio on alaltaan puolet N:n pinta-alasta.

7. tehtävän ratkaisu: Olkoon N:n kärjet $ABCD$. Olkoon E sivun AB keskipiste ja F sivun BC keskipiste. Piirretään N:lle lävistäjät, olkoon O näiden leikkauspiste, ja olkoon G janojen EF ja BD leikkauspiste. Koska janat BE, BF ovat puolet janoista BA, BC, myös jana BG on puolet janasta BO. Siis janat BG ja GO ovat yhtä pitkiä, ja kolmioilla BEF ja OFE on yhteinen kanta EF ja sama korkeus. Siis niillä on sama pinta-ala. Siis kolmion OEF pinta-ala on puolet nelikulmion $OEBF$ pinta-alasta.

Toistamalla yo. argumentti kolmelle muulle samanlaiselle kolmiolle ja nelikulmiolle saadaan väite.

8. Merkitään suljettua yksikköväliä $[0,1]$ ja avointa yksikköväliä $]0,1[$. Etsi bijektio $b\colon [0,1] \to]0,1[$.

8. tehtävän ratkaisu: Määritellään $b(0) = \frac{1}{2}$, $b(1) = \frac{1}{3}$. Luvuille, jotka ovat muotoa $\frac{1}{n}$ jollain positiivisella kokonaisluvulla $n \geq 2$ määritellään $b(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}$.

Kaikilla muilla x määritellään $b(x) = x$.

9. Olkoon $\circ$ 2-paikkainen laskutoimitus luonnollisten lukujen joukossa, eli jos x, y ovat luonnllisia lukuja, niin $x \circ y = z$ jollain luonnollisella luvulla z.

Oletetaan, että on olemassa $b \in \mathbb{N}$, jolle $x \circ b = x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Oletetaan vielä, että on olemassa $a, a' \in \mathbb{N}$, joille $a \circ x = x$ ja $a' \circ x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{N}$.

Osoita, että $a = a'$.

9. tehtävän ratkaisu: Valitsemalla $a = x$ kaavassa $x \circ b = x$ saadaan $a \circ b = a$. Valitsemalla $b = x$ kaavassa $a \circ x = x$ saadaan $a \circ b = b$.

Siis $a = a \circ b = b$. Vastaavalla argumentilla saadaan $a' = a' \circ b = b$. Siis $a = b = a'$.

Vaikeampia tehtäviä

10. Olkoon S ympyrä, ja S' ympyrän S sisään piirretty ympyrä, joka sivuaa ympyrää S pisteessä P'. Olkoon S'' ympyrän S ulkopuolella oleva ympyrä, joka sivuaa ympyrää S pisteessä P''.

Olkoon C' ympyrän S' keskipiste ja C'' ympyrän S'' keskipiste. Olkoon P janojen $C'C''$ ja $P'P''$ leikkauspiste.

Osoita, että $PC' \colon PC''$ on sama kuin ympyröiden S' ja S'' säteiden suhde.

10. tehtävän ratkaisu: Olkoon G sivuamispisteen lisäksi toinen piste, jossa jana $P'P''$ leikkaaympyrän S''. Olkoon C ympyrän S keskipiste.

Nyt kolmiot $P''GC''$ ja $P'P''C$ ovat yhdenmutoisia. Siis kulmat $C'P'P$ ja $C''GP$ ovat yhtäsuuria. Siis kolmiot $C'P'P$ ja $C''GP$ ovat yhdenmuotosia, skaalauskertoimena ympyröiden S' ja S'' säteiden suhde.

11. Olkoon f, g kaksi toisen asteen polynomia, joiden johtokertoimet ovat ykkösiä. Oletetaan, että polynomeilla f, g ja $f + g$ on kullakin kaksi nollakohtaa.

Oletetaan, että polynomien f, g nollakohtien (positiiviset) erotukset ovat samat, olkoon tämä erotus d. Osoita, että polynomin $f + g$ nollakohtien (positiivinen) erotus on korkeintaan d.

11. tehtävän ratkaisu: Kirjoitetaan $f(x) = (x - r_1)(x - r_1 - d)$ ja $g(x) = (x - r_2)(x - r_2 - d)$, missä $d > 0$. Nyt

$(f + g)(x) = 2x^2 + (-2r_1 - 2r_2 - 2d)x + (r_1^2 + r_1 d + r_2^2 + r_2 d)$.

Tarkoitus on näyttää, että tämän polynomien juurten erotus on korkeintaan d. Toisen asteen polynomiyhtälön ratkaisukaavasta saadaan yhtäpitävä väite $(-2r_1 - 2r_2 - 2d)^2 - 8(r_1^2 + r_1 d + r_2^2 + r_2 d) \leq 4d^2$.

Mutta tämä on ilmeistä, koska purkamalla kaava auki saadaan $(r_1 + r_2 + d)^2 - 2(r_1^2 + r_1 d + r_2^2 + r_2 d) = d^2 - |r_1 - r_2|^2$.

12. Oletetaan, että meillä on sana S, joka koostuu 125 A-kirjaimesta ja 125 B-kirjaimesta. Nämä voivat olla missä järjestyksessä tahansa.

Sanalle voidaan tehdä seuraava operaatio: Otetaan S:stä osasana S', joka koostuu peräkkäisistä kirjaimista, ja jossa on yhtä monta A- ja B-kirjainta. Osasana käännetään takaperin, ja jokainen A siinä korvataan B:llä ja jokainen B korvataan A:lla.

Onko olemassa sellaista sanaa S ja jonoa operaatioita niin, että operaatiojonon jälkeen S on muuttunut S:ksi takaperin?

12. tehtävän ratkaisu: Ei ole. Olkoon jokaisen kirjaimen paino sen järjestysnumero sanassa, eli sanan ensimmäisen kirjaimen paino on 1, toisen kirjaimen paino 2 ja niin edelleen. Olkoon sanan S paino d kirjainten B yhteenlaskettu paino, josta on vähennetty kirjainten A yhteenlaskettu paino.

Vertaillaan S:ää ja S:ää takaperin. Näiden painot ovat toistensa vastalukuja. Lisäksi nähdään, että sallitussa operaatiossa sanan S paino säilyy ennallaan.

Jotta sana voitaisiin kääntää operaatiojonolla takaperin, pitää siis olla $d = 0$. Mutta tämä on mahdotonta, koska $\sum_{i=1}^{250} i = 251 \times 125$ on pariton.

13. Korttipakassa on 101 korttia, numeroitu 0-100. Kukin 100 lapsesta tekee seuraavan operaation: Hän sekoittaa kortit. Sitten hän kääntää pakasta yksi kerrallaan sata korttia ja jokaisen käännön jälkeen kirjoittaa taululle hänelle siihen asti tulleiden korttien keskiarvon.

Näin taululle tulee kirjoitetuksi 100×100 lukua. Osoita, että näiden lukujen joukossa on kaksi samaa lukua.

13. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus: Kaikki ovat eri lukuja.

On 101 mahdollisuutta, jotka voivat tulla kaikkien yhden lapsen kääntämien korttien keskiarvoksi. Näistä 100 tulee todella kirjoitetuksi taululle. 101 mahdollisuuden joukossa on $50,5$ (korttien 1-100) keskiarvo, $49,5$ (korttien 0-99) keskiarvo sekä 50 (korttien 0-49, 51-100) keskiarvo. Näistä kolmesta vähintään kaksi tulee todella kirjoitetuksi taululle.

Ensimmäisen ja kahden ensimmäisen kortin keskiarvot ovat muotoa $\frac{n}{2}$, missä $0 \leq n \leq 200$, eli mahdollisuuksia on 201. Näistä 200 tulee todella kirjoitetuksi taululle. Mutta ylläkuvatut kolme kaikkien korttien keskiarvoa ovat myös tätä muotoa, ja niistä kaksi tulee kirjoitetuksi taululle. Jompi kumpi näistä kahdesta on siis sama kuin joku ensimmäisen tai kahden ensimmäisen kortin keskiarvo.

14. Olkoon a, b, c positiivisia reaalilukuja, joille $a + b + c = 1$. Osoita, että

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} + c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq ab + bc + ca + \frac{2}{3}.$$

14. tehtävän ratkaisu: Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}.$$

Aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä saadaan

$$\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(3ab)a} \leq \frac{3ab + a + \frac{1}{3}}{3}.$$

Siis

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq \frac{3(ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1}{3} = ab + bc + ca + \frac{2}{3}$$

.

15. Taululla on 100 positiivista kokonaislukua. Carita pelaa peliä, jossa hän valitsee taululta luvun c, jolle $c = a + b$ joillain sellaisilla a, b, jotka ovat myös taululla. Carita korvaa luvun c jollain suuremmalla kokonaisluvulla.

Peli loppuu, jos Carita ei pysty tekemään siirtoa. Carita yrittää jatkaa peliä äärettömiin. Osoita, että se on mahdotonta.

15. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus: Peliä jatketaan äärettömiin. Taululla olevat luvut jaetaan kahteen osaan: Niihin, jotka kasvavat rajatta (Olkoon näiden joukko R) ja niihin, joiden kasvu pysähtyy jossain vaiheessa (Olkoon näiden joukko P).

Oletetaan, että peliä on jatkettu niin pitkään, että kaikkien joukon P lukujen kasvu on pysähtynyt. Olkoon suurin näistä m. Lisäksi oletetaan, että peliä on jatkettu niin pitkään, että kaikki joukon R luvut ovat suurempia kuin $2m$. Olkoon r nyt pienin joukon R luvuista. Se ei voi olla summa (nyt eikä missään myöhemmässä vaiheessa prosessia), jonka toinen tai kumpikin jäsen kuuluu joukkoon R, koska nämä kaikki ovat vähintään r. Se ei myöskään voi olla summa kahdesta joukon P luvusta, koska kahden tällaisen summa on korkeintaan $2m$. Siis r ei voi kuulua joukkoon R.

16. Tarkastellaan kaikkia satanumeroisia lukuja, jotka ovat jaollisia luvulla 19. Osoita, että on yhtä monta sellaista lukua, jotka eivät sisällä numeroita 4,5,6 kuin sellaisia, jotka eivät sisällä numeroita 1,4,7.

16. tehtävän ratkaisu: Muodostetaan seuraava taulukko

0	0
1	3
2	6
3	9
7	2
8	5
9	8

Vasemmassa sarakkeessa ovat kaikki luvut 0-9, jotka eivät ole $4, 5, 6$ ja oikeassa kaikki luvut 0-9, jotka eivät ole $1, 4, 7$. Luku, jossa ei esiinny numeroita $4, 5, 6$ voidaan siis muuttaa luvuksi, jossa ei esiinny numeroita $1, 4, 7$ muuttamalla luvun jokainen numero niin, että se etsitään vasemmasta sarakkeesta ja korvataan vastaavalla oikean sarakkeen luvulla. Muuttaminen toimii myös kääntäen.

Enää pitää osoittaa, että luku on jaollinen luvulla 19 jos ja vain jos luku, joka saadaan em. muunnoksella on jaollinen luvulla 19. Taulukko on muodostettu niin, että jos vasemman sarakkeen luku on d, on oikean sarakkeen luku $3d \mod 19$.

Todistus on valmis, kun huomataan, että $\sum d_i 10^i \equiv 0 \mod 19$ jos ja vain jos $\sum 3d_i 10^i = 3 \sum d_i 10^i \equiv 0 \mod 19$.

17. Tutkitaan yhtälöä

$$a^b b^c = c^a,$$

missä a, b, c ovat positiivisia kokonaislukuja.

Olkoon p alkuluku, jolle $p|a$. Osoita, että $p|b$.

17. tehtävän ratkaisu: Tehdään vastaoletus, että $v_p(b) = 0$.

Nyt $bv_p(a) = av_p(c)$. Mutta tästä seuraa, että $v_p(a)$:lla on $v_p(a)$ kpl. p:tä tekijänään, eli $p^{v_p(a)}|v_p(a)$. Mutta tästä seuraa $2^{v_p(a)} \leq v_p(a)$. Mutta tämä epäyhtälö on selvästi epätosi kaikilla $v_p(a)$:n arvoilla.

18. Olkoon (a_i) ja (b_i) kaksi ääretöntä jonoa positiivisia kokonaislukuja, joille a_1, a_2, b_1, b_2 ovat pareittain yhteistekijättömiä ja pienempiä kuin 1000. Lisäksi $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ ja $b_i = b_{i-1} + b_{i-2}$ kaikilla $i \geq 3$.

Oletetaan, että a_{i_0} on jaollinen luvulla b_{i_0}. Osoita, että $i_0 \leq 50$.

18. tehtävän ratkaisu: Olkoon f_i Fibonaccin lukujen jono. Induktiolla i:n suhteen nähdään, että $a_i = f_{i-2}a_1 + f_{i-1}a_2$ ja $b_i = f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2$ kaikilla $i \geq 3$.

Jos b_i jakaa luvun a_i, pätee siis

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | f_{i-2}a_1 + f_{i-1}a_2.$$

Siis

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | b_1(f_{i-2}a_1 + f_{i-1}a_2) - a_1(f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2).$$

Purkamalla oikea puoli auki saadaan

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | f_{i-1}(b_1a_2 - b_2a_1).$$

Vastaavasti

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | b_2(f_{i-2}a_1 + f_{i-1}a_2) - a_2(f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2),$$

mistä saadaan

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | f_{i-2}(b_2a_1 - b_1a_2).$$

Koska $f_{i-3} = f_{i-1} - f_{i-2}$, saadaan

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | f_{i-3}(b_2a_1 - b_1a_2).$$

Toistamalla argumenttia päästään muotoon

$$f_{i-2}b_1 + f_{i-1}b_2 | b_2a_1 - b_1a_2.$$

Lisäksi $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$, koska vasemman puolen muuttujilla ei ole yhteisiä tekijöitä.
Siis

$$f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \leq f_{i-1}b_2 + f_{i-2}b_1 \leq |b_2a_1 - b_1a_2| \leq 1000^2 - 1.$$

Todistuksen loppuunviemiseksi riittää siis osoittaa, $f_{51} > 1000000$. Tämä nähdään purkamalla Fibonaccin jonoa. Huomataan että 12. jäsen on suurempi kuin sata. Siis 24. jäsen on suurempi kuin 10000,ja 36. jäsen suurempi kuin 1000000.